sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti (1)

$\Omega^k(U)$ = k-forme definite su U

$f : U \to V$ differenziabile

$d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ derivazione esterna

$f^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ pullback

$\Omega^*(U) = \bigoplus_k \Omega^k(U)$ algebra esterna

f^* : omomorfismo di anelli

$$f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$$
$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$$

d : <u>derivazione</u> di $\Omega^*(U)$

<u>cioè</u>: lineare
$$d(\lambda \omega) = \lambda\, d(\omega)$$
$$d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$$

Leibniz
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$
k = <u>grado di ω</u>

Proposizione $f : U \to V$

$\omega \in \Omega^k(V)$. Allora

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

dimostrazione

- caso $k = 0$

$g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ cioè $g \in \Omega^0(V)$

$$f^*(dg) = f^*\left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i\right)$$

$$= \sum_{i,j} \underline{\frac{\partial g}{\partial y_i}}(f) \cdot \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j}_{df_i}$$

$$= \sum_j \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j$$

$$= d(g \circ f) = d(f^* g)$$

caso k qualunque $\omega = \sum a_I \, dy_I$

e usiamo il caso $k = 0$

$+$ proprietà di f^*, d

$$f^*(d\omega) = f^*\left(\sum_I{}' da_I \wedge dy_I\right)$$

$$= \sum_I{}' f^*(da_I) \wedge f^*(dy_I)$$

$$\longrightarrow \quad = \sum_I{}' d(f^* a_I) \wedge f^*(dy_I)$$

$$= d\left(\sum_I{}' f^*(a_I)\, f^*(dy_I)\right)$$

$$= d(f^*(\omega)) \quad \blacksquare$$

— o —

Esercizi:

① $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineare

φ alternante $\iff \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = -\varphi(\underline{w}, \underline{v})$
$\forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$

dim

$\Longrightarrow$ ponendo $\underline{v} = \underline{w}$ si ha:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = -\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \Longrightarrow \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$$

$\Leftarrow$ Presi $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ calcoliamo

$$0 = \varphi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}) = \cancel{\varphi(\underline{v},\underline{v})} + \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v}) + \cancel{\varphi(\underline{w},\underline{w})}$$

$$= \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v})$$

quindi la tesi.

Sia φ bilineare $\varphi : V \times V \to K$

V = sp. vettoriale su K

① $\varphi(\underline{v},\underline{w}) = -\varphi(\underline{w},\underline{v}) \quad \forall \underline{v},\underline{w} \in V$

② $\varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{v} \in V$

se $K = \mathbb{R}$ abbiamo visto ① $\Leftrightarrow$ ②

①, ② non sono sempre equivalenti.

Esercizio:

a. una implicazione è sempre vera. Quale?

b. che ipotesi dovete mettere su K per avere l'altra implicazione.

ricordiamo che (5)

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{ks} \eta \wedge \omega$$

a. $\deg \omega$ dispari $\Rightarrow$ $\omega \wedge \omega = 0$

b. trovare ω con $\deg \omega = k > 0$

tale che $\omega \wedge \omega \neq 0$

<u>dim.</u> a. ovvio perché k dispari $\Rightarrow k^2$ dispari

<u>b</u>. proviamo con $k = 2$

ω 2-forma $\Rightarrow$ $\omega \wedge \omega$ 4-forma

deve essere $\dim V \geq 4$

$$\omega = \underbrace{dx_1 \wedge dx_2}_{a_1} + \underbrace{dx_3 \wedge dx_4}_{a_2}$$

$$\omega \wedge \omega = (a_1 + a_2)^2 = \cancel{a_1 \wedge a_1} + a_1 \wedge a_2 + a_2 \wedge a_1 + \cancel{a_2 \wedge a_2}$$

$$= (dx_1 \wedge dx_2) \wedge (dx_3 \wedge dx_4) + (dx_3 \wedge dx_4) \wedge (dx_1 \wedge dx_2)$$

$$= 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \neq 0$$

Esercizio 3.7 pag 224

$V = \mathbb{R}^{2n}$

$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$

$\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$

$\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$? n volte

$\omega^n \in \Omega^{2n}(\mathbb{R}^{2n}) \leftarrow$ q.s spazio ha dim 1

$\Rightarrow \omega^n = A \cdot (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{2n})$

poniamo $a_i = dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$

$\omega^n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n$

$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \wedge \dots \wedge (a_1 + \dots a_n)$

unici termini non nulli $\rightarrow$ scegliere un addendo diverso da ogni parentesi

$$\omega^n = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)} \wedge a_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge a_{\sigma(n)}$$

tutti gli a_i sono 2-forme $\rightarrow$ si possono scambiare

$\rightarrow \omega^n = n!(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{2n})$

Consideriamo $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ (7)

posso scrivere:

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U) \to \dots$$

$\Omega^k(U)$ = sp. vettoriali, d = <u>lineare</u>

$Z^k(U) = \ker d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$

$B^k(U) = \operatorname{Im} d : \Omega^{k-1} \to \Omega^k$

- Z^k = k-forme ω : $d\omega = 0$

  = <u>forme chiuse</u>

- B^k = k-forme ω : $\exists\, \eta$ per cui <u>$\omega = d\eta$</u>

  = <u>forme esatte</u>

$d^2 = 0$ significa

$$B^k \subseteq Z^k$$

<u>cioè</u>: esatta $\Rightarrow$ chiusa

se $\omega = P\,dx + Q\,dy$

$$d\omega = P_y\,dy \wedge dx + Q_x\,dx \wedge dy$$

$$= (Q_x - P_y)\,dx \wedge dy$$

$\boxed{d\omega = 0}$ significa $\boxed{Q_x = P_y}$

$$\omega = P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \cdots + P_n\,dx_n$$

$$d\omega = dP_1 \wedge dx_1 + dP_2 \wedge dx_2 + \cdots$$

$$= \sum_i \frac{\partial P_1}{\partial x_i}\,dx_i \wedge dx_1 + \sum_i \frac{\partial P_2}{\partial x_i}\,dx_i \wedge dx_2 + \cdots =$$

$$= \sum_{i<j} \underbrace{\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i}\right)}_{}\,dx_i \wedge dx_j$$

$$= 0$$

Possiamo definire: $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\frac{Z^k(U)}{B^k(U)} = \text{sp. vettoriale quoziente}$$

Notazione:

$$H^k_{dR}(U) = Z^k(U) / B^k(U)$$

si chiama k-esimo gruppo di coomologia di deRham

Osservazione:

dire $H^k_{dR}(U) = \{0\}$ significa

esatta $\Longleftrightarrow$ chiusa

per esempio:

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$\omega \in \Omega^1(U)$ $\qquad U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$d\omega = 0 \Longrightarrow \omega \in Z^1(U)$

ma: ω non è esatta $\Longrightarrow H^1_{dR}(U) \neq \{0\}$

perché contiene almeno la classe di ω.

Fatto (non semplicissimo)

$H^k_{dR}(U)$ si costruisce usando le forme differenziali, cioè usando la struttura differenziabile (derivate, ...)

In effetti: se $U \simeq V$ omeomorfi

allora: $H^k_{dR}(U) \simeq H^k_{dR}(V)$

cioè: questi gruppi sono di natura topologica.

Operatori differenziali

- $*$ di Hodge (si legge "star di Hodge")

$\mathbb{R}^n_v$ con base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$

funz. coord $\{x_1, \dots, x_n\}$

$p \in \mathbb{R}^n_a \longrightarrow T_p\mathbb{R}^n$ ha base $\{e_1|_p, \dots, e_n|_p\}$

$T^*_p\mathbb{R}^n$ ha base $\{dx_1, \dots, dx_n\}$

$\omega = \sum_I a_I \, dx_I$ ... definita su $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}) = (-1)^{\sigma}(dx_{j_1}\wedge - \wedge dx_{j_{n-k}})$$

$$i_1 < i_2 < - < i_k \quad , \quad j_1 < j_2 < - < j_{n-k}$$

$$\sigma = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_{n-k} \end{array}\right)$$

Esempi $\quad k=1, \quad \mathbb{R}^n$

$$*dx_1 = + dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{array}\right) \longrightarrow \text{segno } + \\ \quad i \qquad\qquad j \end{array}$$

$$*dx_2 = - dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\wedge - \wedge dx_n$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots & n \end{array}\right) \longrightarrow \text{segno } -$$

In generale se $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$

si pone $\quad *\omega = \sum_I a_I\,(*dx_I)$

$\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_2 \wedge dx_4$ in $\mathbb{R}^4$ 12

$*\omega$ è una $4-2 = 2$ - forma

$$*\omega = x_1 (* dx_2 \wedge dx_3) + x_2 (* dx_2 \wedge dx_4)$$

$$= x_1\, dx_1 \wedge dx_4 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3$$

$$* dx_2 \wedge dx_3 = + dx_1 \wedge dx_4$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \underbrace{2 \;\; 3} & & \underbrace{1 \;\; 4} & \end{pmatrix} = (1\,2\,3) \to \text{pari}$$

$$* dx_2 \wedge dx_4 = - dx_1 \wedge dx_3$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2\,4\,3) \to \text{dispari}$$

$*$ e d non commutano

ω k - forma $\qquad d\omega = (k+1)$ forma

$*(d\omega) = (n-k-1)$ - forma

$*\omega = (n-k)$ forma

$d(*\omega) = (n-k+1)$ - forma

- contrazione di una forma

ω = k-forma su $U \subseteq \mathbb{R}^n$

X = campo vettoriale su $U \subseteq \mathbb{R}^n$

esempio: $k=1$ posso definire una

funzione $\omega(X): U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) \in \mathbb{R}$$

In generale X campo vett
ω k-forma

$X \lrcorner \omega$ = contrazione di ω lungo X

= $(k-1)$-forma data da:

$$(X \lrcorner \omega)(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1})$$

Esempio: $\mathbb{R}^3$, $X(x,y,z) = (x,y,z)$

$\omega = dx \wedge dy$. Cosa è $X \lrcorner \omega$?

è 1-forma $\Rightarrow$ $X \lrcorner \omega = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$

con α, β, γ funzioni

si applica:

$$(\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz)(\underline{e}_1|_p) = \alpha(p)$$

il campo X è $X = x\,\underline{e}_1 + y\,\underline{e}_2 + z\,\underline{e}_3$

$$X \lrcorner\, \omega\,(\underline{e}_1|_p) = \omega(X, \underline{e}_1)$$

$$= (dx \wedge dy)(x\,\underline{e}_1 + y\,\underline{e}_2 + z\,\underline{e}_3, \underline{e}_1)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} = -y = \alpha(p)$$

calcolando β, γ si ottiene

$$X \lrcorner\, \omega = -y\, dx + x\, dy$$