ESAMI GIUGNO/LUGLIO

1

- SCRITTO: a distanza per tutti
- ORALE: in presenza, con possibilità a distanza per:
  1. Fragilità
  2. Quarantena
  3. Fuori regione

$\boxed{\text{LEGGERE SU MOODLE}}$

Dualità: $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ (2)

$T_p\mathbb{R}^n \simeq T_p^*\mathbb{R}^n$ sp. vett. duali

su $T_p\mathbb{R}^n$ c'è un prodotto scalare

oss. se V sp. vett (dimensione finita)
e $\langle \, , \, \rangle$ = prodotto scalare su V

$\underline{v} \in V \longrightarrow f_{\underline{v}} \in V^*$ cioè $f_{\underline{v}} : V \to \mathbb{R}$

$$f_{\underline{v}}(\underline{w}) = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

$V \longrightarrow V^*$
$\underline{v} \longrightarrow f_{\underline{v}}$ è lineare, iniettiva
perché $\langle \, , \, \rangle$ è non degenere

chi è questo isomorfismo fra $T_p\mathbb{R}^n \to T_p^*\mathbb{R}^n$:

$T_p\mathbb{R}^n$ ha base $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ base canonica
è ortonormale rispetto al prod scalare

$$f_{\underline{e}_1}(\underline{e}_j) = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_j \rangle = \delta_{1j}$$

cioè: $f_{\underline{e}_1} = dx_1$ elemento della base duale

quindi l'isomorfismo è: $\underline{e}_j \longrightarrow dx_j$

Questo isomorfismo vale in ogni punto (3)
e quindi produce degli isomorfismi
fra campi vettoriali e 1-forme diff

$$X = \sum_i f_i(x)\, \underline{e}_i \longrightarrow X^\flat = \sum_i f_i(x)\, dx_i$$

$$\omega = \sum_i g_i(x)\, dx_i \longrightarrow \omega^\# = \sum_i g_i(x)\, \underline{e}_i$$

<u>Convenzione</u> : posizionamento degli indici

tangenti : indici in <u>alto</u> $\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^n$

cotangenti : indici in <u>basso</u> $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$

<u>Operatori classici</u>

- <u>Divergenza di un campo vettoriale</u>

$$X = \sum_i f_i(x)\, e_i \qquad \text{campo vettoriale su } U$$

X può essere pensato come una funzione $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}(dX_p)$$

$\operatorname{div} X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione

$$dX_p : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{X(p)}\mathbb{R}^n$$

$$dX_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right) \longleftarrow \text{matrice del differenziale}$$

e quindi in coordinate:

$$(\mathrm{div}\, X)(p) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p)$$

- <u>gradiente di una funzione</u>

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione

il gradiente è un campo vettoriale

$$(\mathrm{grad}\, f)_p = (df_p)^\#$$

equivalentemente

$$df_p = (\mathrm{grad}_p)^\flat$$

in coordinate

$$(\mathrm{grad}\, f)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \underline{e}_i|_p$$

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, dx_i$$

rotore (di un campo vettoriale)

$\mathrm{rot}\, X$ = rotore di X

= $(n-2)$-forma differenziale

$$\boxed{\mathrm{rot}\, X = *(dX^\flat)}$$

se $n=3 \longrightarrow \mathrm{rot}\, X$ = 1-forma

la definizione vista in Analisi e Fisica è:

$$Y = \mathrm{rot}\, X$$

$$Y = \left[*(dX^\flat) \right]^\#$$

sia $X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale

$$X = f_1 \underline{e}_1 + f_2 \underline{e}_2 + f_3 \underline{e}_3$$

$$X^\flat = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + f_3\, dx_3$$

$$dX^\flat = df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 + df_3 \wedge dx_3$$

$$= \left(\sum_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1 + (\quad) + (\quad)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \text{———} \quad \ldots$$

$$= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$
$$+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_3$$
$$+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3$$

$$*(dx_1 \wedge dx_2) = + dx_3$$
$$*(dx_1 \wedge dx_3) = - dx_2$$
$$*(dx_2 \wedge dx_3) = + dx_1$$

quindi:

$$*(dX^\flat) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_1 + \text{———} \cdots$$

$$Y = \#(* dX^\flat) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \underline{e}_1 + \text{———}$$

$*(dX^\flat)$ è più semplice da ricordare

e da scrivere che non tutte le componenti

<u>per concludere</u>: svolgere esercizi

Capitolo 6, paragrafo 5

esercizi: 5.13, 5.14

Integrazione di 1-forme

7

problema: capire quando una forma chiusa è esatta.

$\omega \in \Omega^1(U)$ $\quad U =$ aperto di $\mathbb{R}^n$

Teorema 1 (noto dall'Analisi)

se U è stellato, allora ω chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta.

OK

Teorema 2 (noto dall'Analisi, ma forse non dimostrato)

se U è semplicemente connesso, allora

ω chiusa $\Rightarrow$ ω esatta

Questo teorema non vale per forme di grado ≥ 2

$U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (sempl. connesso)

esistono 2-forme chiuse ma non esatte

Teorema 3 se U è contraibile (8)

allora: ω k - forma chiusa

$\Longrightarrow$ ω k - forma esatta $\quad (k \geq 1)$

Programma d'esame

Teoremi 1 - 2 - 3 enunciato
Teoremi 2 dimostrazione

Questi teoremi si chiamano di solito

Lemma di Poincaré

Dimostrazione del Teorema 2

U aperto in $\mathbb{R}^n$, $\quad \alpha : [a,b] \to U$

$\omega \in \Omega^1(U)$

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \alpha^* \omega$$

(integrale curvilineo di seconda specie)

sia U **connesso**, $\omega \in \Omega^1(U)$

Fatto 1 sono equivalenti

1. ω esatta
2. $\int_\alpha \omega$ dipende solo dagli estremi del cammino α, $\forall \alpha$
3. $\int_\alpha \omega = 0$ per ogni cammino chiuso

Problema: cosa vuol dire

$\int_\alpha \omega$ per α cammino continuo

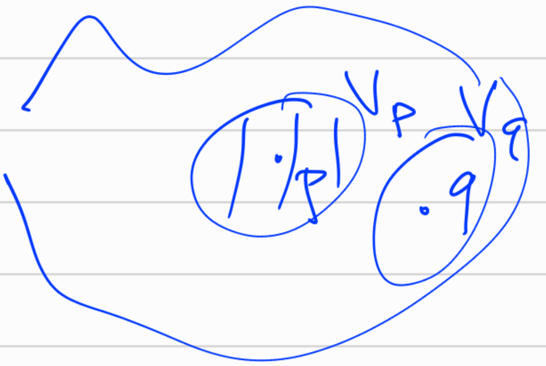
si può definire per forme chiuse, usando il Teorema 1

Oss. ω chiusa $\Rightarrow$ ω localmente esatta

cioè: sia $p \in U$

allora $\exists$ un intorno $V_p \subseteq U$ tale che ω è esatta su V_p, cioè

esiste $f : V_p \to \mathbb{R}$: $df = \omega$ su V_p



U ω è definita in U

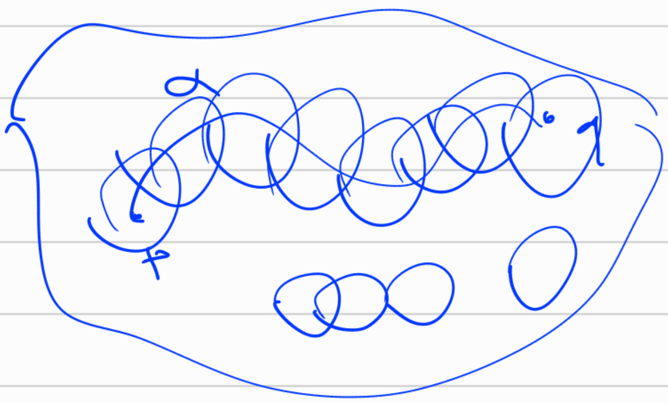
$f : V_p \to \mathbb{R}$

$df = \omega$

chiusa $\Rightarrow$ loc. esatta

infatti, dentro U esiste una palla aperta $U_p \longrightarrow U_p$ è stellato

su U_p ω è chiusa $\Rightarrow$ è esatta



per ogni $p \in U$

$\longrightarrow U_p$ intorno su cui ω è esatta

$[a,b] \xrightarrow{\alpha} U$ $\qquad \{\alpha^{-1}(U_p)\}_{p \in U}$ ric. aperto di $[a,b]$

$\longrightarrow$ esiste un numero di Lebesgue del ricopr.

$\longrightarrow$ esiste $\delta > 0$: se $|t_{i+1} - t_i| < \delta$

$\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_p$

dunque troviamo una partizione: (11)

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1} = b$$

: ω è esatta su $\alpha[t_i, t_{i+1}]$ e

quindi esistono funzioni f_i per cui

$$\omega = df_i \quad \text{su } B_i \supseteq \alpha[t_i, t_{i+1}]$$

$$\int_\alpha \omega = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha^* \omega = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \left[f_i(t_{i+1}) - f_i(t_i) \right]}$$

ha senso solo se α differenziabile

ha senso anche quando α è continua

Quindi: se ω chiusa, α continua definisco

$$\int_\alpha \omega = \sum_{i=0}^{k} \left[f_i(t_{i+1}) - f_i(t_i) \right]$$

Teorema 6.11 (delle dispense)

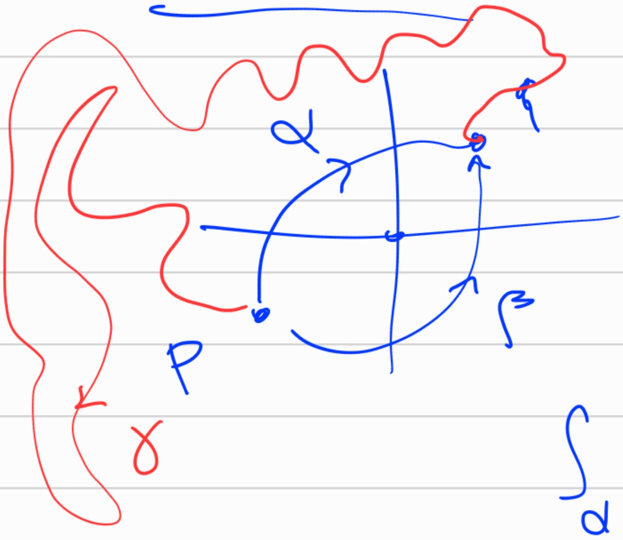
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, ω 1-forma chiusa

α, β cammini in U omotopi ad estremi fissi

Allora:

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

Osservazione: $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



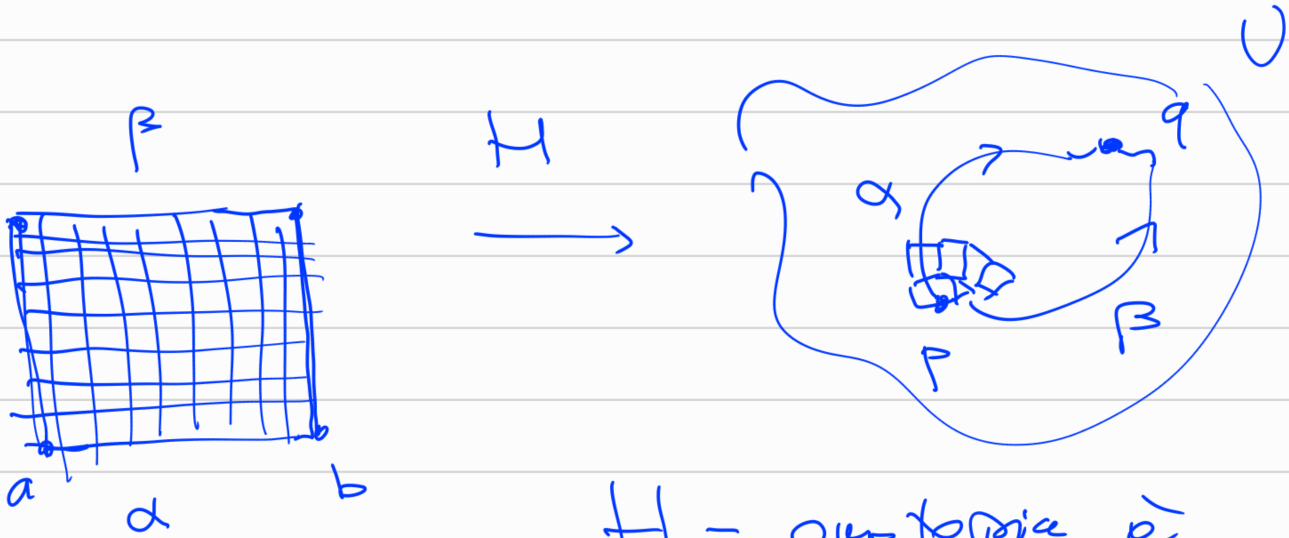
α e β non sono omotopi ad estremi fissi

ω chiusa

$$\int_\alpha \omega \overset{?}{=} \int_\beta \omega$$

però $\int_\alpha \omega = \int_\gamma \omega$

dim del Teorema 6.11



H = omotopia è continua

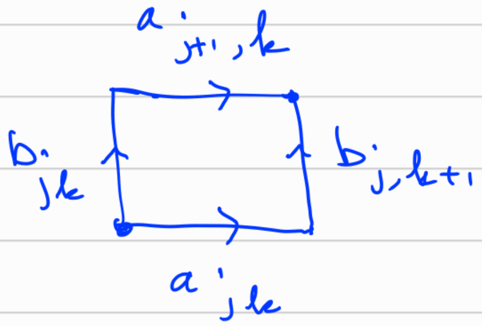
Di nuovo: $\{U_p\}$ ricoprimento di U con aperti su cui ω è esatta

$\{H^{-1}(U_p)\}$ ric. aperto di $[a,b]\times[0,1]$

su ogni quadratino, la forma ω è esatta

$$R_{jk} \longrightarrow \int_{\partial R_{jk}} \omega = 0$$

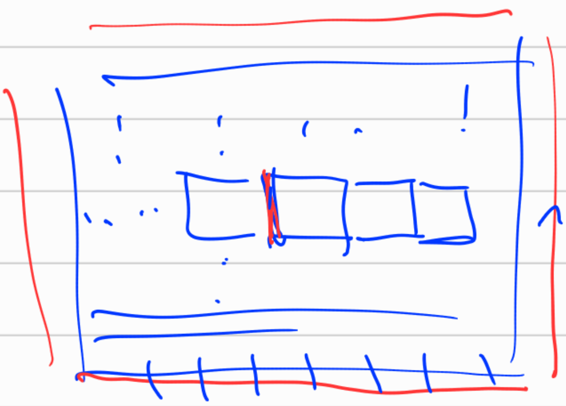
(ω esatta, ∂R_{jk} chiuso)



$$\sum_{j,k} \int_{\partial R_{jk}} \omega = 0$$

$$\Downarrow$$

$$= \sum \left[\int_{a_{jk}} \omega + \int_{b_{j,k+1}} \omega - \int_{a_{j+1,k}} \omega - \int_{b_{jk}} \omega \right]$$



i lati interni compaiono 2 volte con segni opposti $\longrightarrow$ si cancellano

rimangono solo i bordi del rettangolo grande

$$0 = \int_\alpha \omega + \cancel{\int_{C_b} \omega} - \int_\beta \omega - \cancel{\int_{C_a} \omega}$$

$$= \int_\alpha \omega - \int_\beta \omega$$

∎

$\oplus$ ha due significati

interna: $V_1, V_2 \subseteq W$

$\rightarrow V_1 + V_2 =$ sottospazio generato da V_1 e V_2

la somma è diretta? — sì …
— NO

Operazione: somma
agg. qualificativo: diretta

esterna V_1, V_2 sp. vettori di

$V = V_1 \oplus V_2$ V è un nuovo sp. vett.

$V = \{ (v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$

$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$

⋮

$$\Omega^*(U) = \Omega^0(U) \oplus \Omega^1(U) \oplus \Omega^2(U) \oplus \dots$$

somma diretta esterna

prodotto wedge:

$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$

$$dx_I \wedge dx_J \underset{def}{=} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

Se $\omega = \sum' a_I \, dx_I$, $\eta = \sum' b_J \, dx_J$

$$\omega \wedge \eta = \sum' a_I b_J \, dx_I \wedge dx_J$$

$$(a+b) + (b+c)$$
$$= a + 2b + c$$

$\omega + \eta$ $\underline{\underline{\text{non}}}$ è una forma multilineare

Ω^k = forme k-lineari

Ω^* = algebra esterna