Teorema di Stokes

è una uguaglianza fra due integrali

- integrando
- dominio di integrazione
- come si calcola il <u>numero</u>

per il teorema di Stokes

- integrando : forma differenziale
- dominio : ?
- regola : ?

Parliamo del dominio di integrazione

una k-forma si integra su un dominio <u>k</u>-dimensionale

$$[0,1]^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i\}$$

$$[0,1]^0 = \{0\} = \mathbb{R}^0$$

<u>Definizione</u>: un <u>k-cubo singolare</u> in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

una funzione (continua)

$$c : [0,1]^k \longrightarrow U$$

esempio: 0 - cubo singolare ?

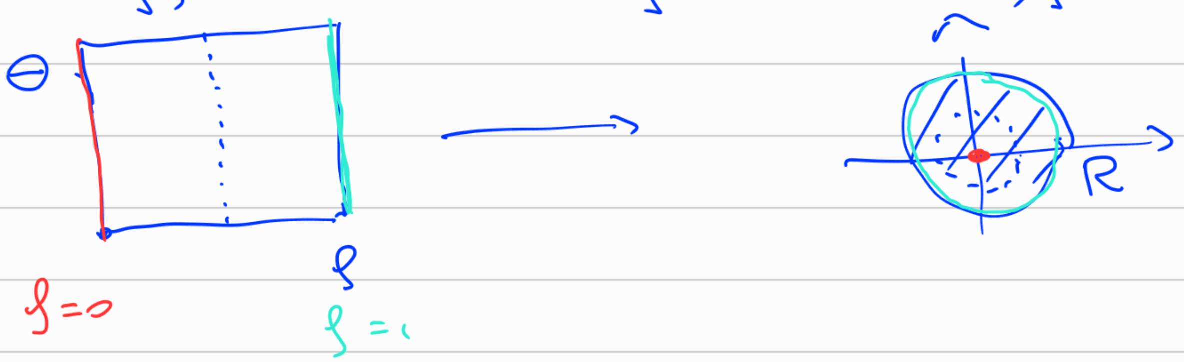
$$c : \{0\} \longrightarrow U$$

perciò si identifica $c(0) = a \in U$

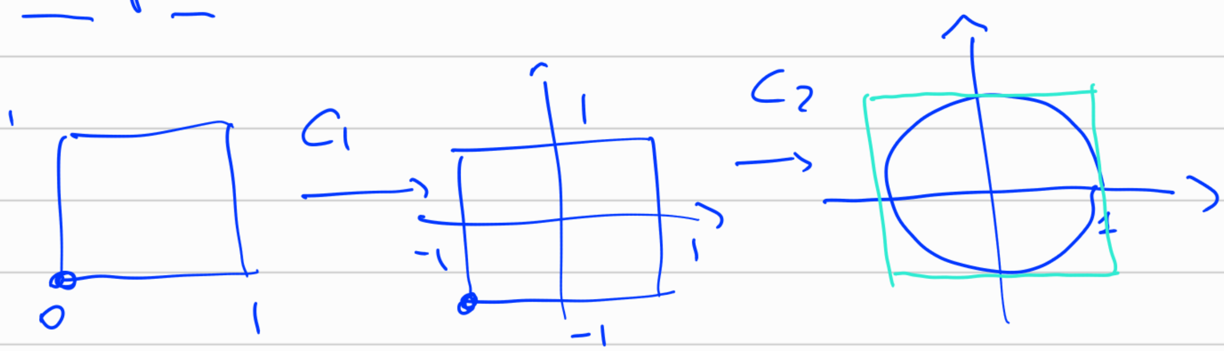
esempio: 1 - cubo singolare = curva

esempio: cerchio in $\mathbb{R}^2$

$$c(\rho, \theta) = (\rho R \cos(2\pi\theta), \rho R \sin(2\pi\theta))$$



esempio: cerchio come retrazione del quadrato



$$c_1(x,y) = (2x-1, 2y-1)$$

$$c_2(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{per } x^2+y^2 \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) & \text{per } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

$c = c_2 \circ c_1 = 2$-cubo singolare

Esempio: il cubo standard

$$I^n : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$I^n(x) = x \qquad (\text{identità})$$

Prop. fondamentale degli integrali soliti

$a < b < c$, f continua

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

additività rispetto al dominio

Definizione Una k-catena singolare in U è una comb. lineare formale di k-cubi in U a coefficienti interi

Esempio: se $c_1 : [0,1]^k \to U$, $c_2 : [0,1]^k \to U$

$$c = 2c_1 + 7c_2$$

Attenzione: $U \subseteq \mathbb{R}^n_a$

la somma è "formale"

Se $c = 2c_1 + 7c_2 - 4c_3$

$c' = -c_1 + c_4$

$c + c' = c_1 + 7c_2 - 4c_3 + c_4$

A cosa servono le catene? A definire con precisione il <u>bordo</u>

$I^1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

bordo di I^1? $\{1\} - \{0\}$

$\{1\}$: 0-cubo $\qquad c_1 : \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \longrightarrow 1$

$\{0\}$: 0-cubo $\qquad c_0 : \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \longrightarrow 0$

I^2

bordo di I^2 = somma di 4 termini

bordo di un cubo:

I^n = cubo standard $I^n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$

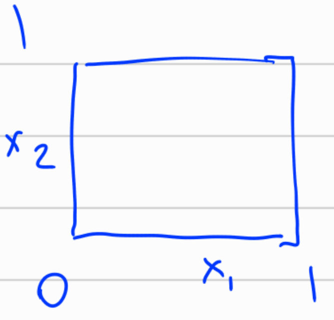
definisco degli $(n-1)$-cubi

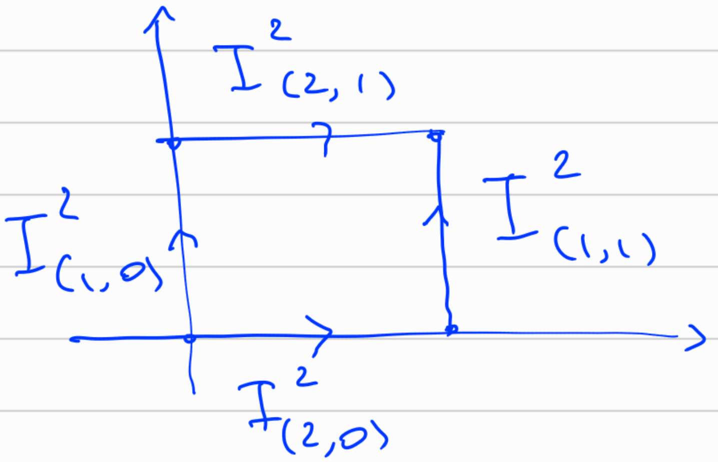
$[0,1]^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}$

$$I^n_{(i,0)}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

$$I^n_{(i,1)}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1})$$





Definizione: il bordo di I^n è:

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}$$

Sia $c : [0,1]^n \longrightarrow U$ n-cubo (6)

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I^n_{(i,\alpha)}$$

$\shortparallel$

faccia i-esima a livello α

- $$\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

- $$\partial \Big(\underbrace{\sum a_i c_i}_{\text{catena}} \Big) = \sum a_i \, \partial(c_i)$$

<u>Osservazioni:</u>

- $$c_{(i,\alpha)} = \left(I^n_{(i,\alpha)} \right)^* c \qquad \underline{\text{pullback}}$$

- c catena : $\partial(\partial c) = 0$

C'è legame fra $d^2 = 0$ e $\partial^2 = 0$?

<u>Certamente!</u>

Integrali:

$\omega = k$ - forma, $\quad c = k$ - catena

$$\int_c \omega = \ ?$$

d'ora in poi: c = cubo differenziabile

$$c : [0,1]^k \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$$

cioè $\exists \ [0,1]^k \subseteq V$, aperto, $\quad c: V \to U$ differenz.

* $\omega = k$ - forma su $[0,1]^k \subseteq \mathbb{R}^k$

$$\omega = f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k$$

definizione:

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \underline{\underline{\int_{[0,1]^k} f(x_1 \dots x_k)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_k}}$$

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_D f(x,y)\, dy\, dx$$

<u>Definizione</u>: $\omega \in \Omega^k(U)$

$c : [0,1]^k \longrightarrow U$ k-cubo

$$\boxed{\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^* \omega}$$

se $c = \sum_i a_i c_i$ è una k-catena

$$\boxed{\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega}$$

<u>Osservazione</u>: $k = 0$

0-forma = <u>funzione</u>

0-catena = somma (formale) di <u>punti</u>

se $c : \{0\} \longrightarrow U$, $0 \longmapsto a$ | $f \in \Omega^0(U)$ cioè $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{\int_c f = f(a)}$$

Teorema di Stokes

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ $(k-1)$ forma

c una k-catena in U

$$\boxed{\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega}$$

$n=1$, $k=1$ $\longrightarrow$ Teorema fond del calcolo int.

Dimostrazione: $c = I^k$

$\omega = (k-1)$ forma su $[0,1]^k$

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$$

non c'è

basta dimostrare per gli addendi:

$$\boxed{\omega = f_i \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k}$$

$$\partial I^k = \sum (\ \ ) \, I^k_{(j,\alpha)}$$

$$\int_{I^k_{(j,\alpha)}} f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k =$$

$$= \int_{[0,1]^{k-1}} \left(I^k_{(j,\alpha)}\right)^* \left(f_i \, dx_1 \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_k\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & j \neq i \text{ perché } dx_j = 0 \\ \displaystyle\int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{\alpha}, \dots, x_k) \, dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_k & i = j \end{cases}$$

totale:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{\partial I^k} \omega = {} & (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1 \dots 1 \dots x_k) \, dx_1 \dots dx_k \\ & + (-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1 \dots 0 \dots x_k) \, d\dots \end{aligned}}$$

a sinistra!

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{I^k} d\left(f_i \, dx_1 - \hat{dx_i} \, dx_k \right)$$

$$= \int_{I^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 - \wedge dx_k$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 - dx_k =$$ Fubini

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 - dx_k$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(f_i(1) - f_i(0) \right) dx_1 - \hat{dx_i} - dx_k$$

è uguale a quello di prima.

OK per il caso standard.