Preparazione per lo scritto: (1)

Martedì 25, ore 15:30 || ONLINE

Giovedì 27, ore 10:30

(forse con registrazione)

Teorema di Stokes sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
sia $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$, sia c una k-catena in U. Allora

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Abbiamo visto la dim nel caso $c = I^k$ = k-cubo standard

sia adesso c = k-cubo arbitrario

per definizione
$$\int_c \omega = \int_{I^k} c^* \omega = \int_{[0,1]^k} \cdots$$

$$\int_{\partial c} \eta = \int_{\partial I^k} c^* \eta$$

2

Allora:

$$\int_c d\omega \overset{\text{def}}{=} \int_{I^k} c^*(d\omega) \overset{\text{prop } c^*d = dc^*}{=} \int_{I^k} d(c^*\omega)$$

$$= \int_{\partial I^k} c^*\omega \overset{\text{def}}{=} \int_{\partial c} \omega$$

Stokes per il cubo standard

Ultimo passaggio: se $c = \sum_i a_i c_i$ è una k-catena allora $\partial c = \sum_i a_i \partial c_i$ e quindi per additività si ha:

$$\int_c d\omega = \sum_i a_i \int_{c_i} d\omega = \sum_i a_i \int_{\partial c_i} \omega$$

$$= \int_{\partial c} \omega \quad \blacksquare$$

Osservazione: c k-cubo

$\partial c = \sum_i c_{j,\alpha}$ facce del cubo

dove $c_{j,\alpha} = c \circ I^k_{j,\alpha} = I^*_{j,\alpha}(c)$

3

$$\int_{\partial c} \omega = \sum_i (-1)^* \int_{c_{j,\alpha}} \omega =$$

$$= \sum_i (-1)^* \int_{[0,1]^{k-1}} c_{j,\alpha}^* \omega =$$

$$= \sum_i (-1)^* \int_{[0,1]^{k-1}} (I^k)^* (c^*(\omega))$$

$$= \sum_i (-1)^* \int_{I_{j,\alpha}} c^* \omega$$

$$= \int_{\partial I^k} c^* \omega$$

Green - divergenza - rotore

Forma di volume

Cap 6 (Forme diff), Esercizi 3.8
5.13, 5.14

3.8 : su $\mathbb{R}^n$ consideriamo la n-forma diff.

$$v(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n) = 1$$

si vede subito che $v = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$

multilineare alternante:

$$v(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \det(a_{ij}) = \mathrm{vol}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$$

$$\underline{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \underline{e}_j$$

volume del parallelepipedo di lati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

Notazione: $dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$

forma di volume

Ex 5.13 X = campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$

$$d(* X^\flat) = (\mathrm{div}\, X) \cdot dV$$

equivalentemente

$$\operatorname{div} X = *\left(d(* X^\flat)\right)$$

(poiché $* dV = 1$)

E' un calcolo: $X = \sum_i f_i(x)\, \underline{e}_i$

$$X^\flat = \sum_i f_i(x)\, dx_i$$

scegliendo un campo X: $\operatorname{div} X = 1$

si ottiene dV esatta.

Ex 5.14

(4) $\quad * X^\flat = X \lrcorner\, dV$

—o—

Elemento di area / Elemento di lunghezza

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup. regolare orientata

$\underline{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ param locale

$\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ base di T_pS

$$N = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} = \text{campo normale}$$

$\{\underline{x}_u, \underline{x}_v, N\}$ base di $\mathbb{R}^3$ positiva (6)

Definizione per $\underline{v}, \underline{w} \in T_pS$

$$dA_p(\underline{v}, \underline{w}) = \det \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{w} \\ N \end{pmatrix}$$

$$= (\underline{v} \wedge \underline{w}) \cdot N_p$$

dA = 2-forma alla superficie S

$$dA(\underline{v}, \underline{w}) = \pm \| \underline{v} \wedge \underline{w} \|$$

$\underline{x} : U \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad \underline{x}$ = 2-cubo singolare

$$\underline{x}^*(dA)$$

ricordiamo $d\underline{x}(\underline{e}_1|_q) = \underline{x}_u$

$d\underline{x}(\underline{e}_2|_q) = \underline{x}_v$

def. di pullback di forme

$$\underline{x}^*(dA)(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = dA(\underline{x}_u, \underline{x}_v)$$

$$= (\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v) \cdot N$$

$$= (\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v) \cdot \frac{(\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v)}{\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \|} = \| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \|$$

$= \sqrt{EG - F^2}$

Quindi:

$$\int_S dA = \int_U \underline{x}^*(dA)$$

$$= \int_U \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = \underline{\underline{\text{area}}}$$

Teorema 4.2 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare, orientata

$\underline{N}$ = campo normale

$\underline{N} = N_1 \underline{e}_1 + N_2 \underline{e}_2 + N_3 \underline{e}_3$ (in componenti)

Allora:

a. $dA = N_1\, dy \wedge dz + N_2\, dz \wedge dx + N_3\, dx \wedge dy$

b. su S valgono le uguaglianze

$$N_1\, dA = dy \wedge dz$$
$$N_2\, dA = dz \wedge dx$$
$$N_3\, dA = dx \wedge dy$$

cioè solo per vettori tangenti a S

dimostrazione:

a. $$dA(\underline{v}, \underline{w}) = \det \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{w} \\ N \end{pmatrix}$$

$$= N_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + N_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + N_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$= N_1 \, dy \wedge dz (\underline{v}, \underline{w}) + N_2 \, dz \wedge dx (\underline{v}, \underline{w}) + N_3 \, dx \wedge dy (\underline{v}, \underline{w})$$

∎

b. $\underline{v}, \underline{w} \in T_p S$

allora $\underline{v} \wedge \underline{w} = \alpha \underline{N}$

$$N_1 \, dA(\underline{v}, \underline{w}) = (\underline{e}_1 \cdot \underline{N}) (\underline{v} \wedge \underline{w}) \cdot N$$

$$= (\underline{e}_1 \cdot \underline{N}) \alpha$$

$$= \underline{e}_1 \cdot \alpha \underline{N}$$

$$= \underline{e}_1 \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2) = dy \wedge dz (\underline{v}, \underline{w})$$ ∎

Riscriviamo il teorema usando $\ast$, $\lrcorner$

$\underline{N}$ = campo vettoriale $= N_1 \underline{e}_1 + N_2 \underline{e}_2 + N_3 \underline{e}_3$

$$\underline{N}^\flat = N_1\, dx + N_2\, dy + N_3\, dz$$

$$\boxed{\ast N^\flat = N_1\, dy \wedge dz + N_2\, dz \wedge dx + N_3\, dx \wedge dy}$$

$$dA(\underline{v}, \underline{w}) = \det\begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{w} \\ \underline{N} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{N} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix}$$

$$= dx \wedge dy \wedge dz\, (\underline{N}, \underline{v}, \underline{w})$$

$$= dV(\underline{N}, \underline{v}, \underline{w})$$

$$= \underline{N} \lrcorner\, dV(\underline{v}, \underline{w})$$

cioè $\quad dA = \underline{N} \lrcorner\, dV$

quindi il teorema è:

$$\boxed{\underline{N} \lrcorner\, dV = \ast N^\flat}$$

Enunciato analogo per le curve

Teorema 4.4 $C \subseteq \mathbb{R}^3$ curva regolare

$\underline{t}$ = campo tangente unitario

$$\underline{t} = t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2 + t_3 \underline{e}_3$$

Allora: su C (cioè per vettori tangenti a C) si ha:

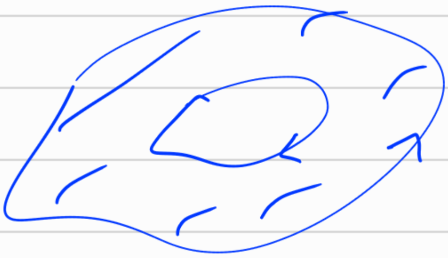
$$t_1\, ds = dx, \quad t_2\, ds = dy, \quad t_3\, ds = dz$$

dove ds è la 1-forma su C definita da: $\quad ds(\underline{t}) = 1$

—o—

Green nel piano

$S \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio compatto con bordo differenziabile orientato in modo che S sia "a sinistra" del bordo



$P, Q : S \to \mathbb{R}$. Allora

$$\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Dimostrazione:

$$\omega = P\,dx + Q\,dy \qquad \underline{+\ \text{Stokes}}.$$

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy .$$

—o—

Divergenza $\quad M \subseteq \mathbb{R}^3$ dominio compatto con bordo un insieme di superfici orientate

$\underline{N}$ = campo normale su ∂M orientate in modo che $\{\underline{X}_u, \underline{X}_v, \underline{N}\}$ ha l'orientazione di $\mathbb{R}^3$.

$\underline{F} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale

Allora:

$$\int_M \operatorname{div} \underline{F}\, dV = \int_{\partial M} (\underline{F} \cdot \underline{N})\, dA$$

Dimostrazione

dall'esercizio fatto prima:

$$(\operatorname{div} \underline{F})\, dV = d(* \underline{F}^\flat)$$

e quindi:

$$\int_M \operatorname{div} \underline{F}\, dV = \int_M d(* F^\flat)$$

$$= \int_{\partial M} * F^\flat$$

$$* F^\flat = F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy$$

su ∂M si ha

$$dy \wedge dz = N_1\, dA$$
$$dz \wedge dx = N_2\, dA$$
$$dx \wedge dy = N_3\, dA$$

$$* F^\flat = F_1 N_1\, dA + F_2 N_2\, dA + F_3 N_3\, dA$$

$$= (\underline{F} \cdot \underline{N})\, dA \quad \blacksquare$$

—o—

Rotore $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientata con bordo. $\underline{N}$ = campo normale su S.

∂S = orientazione indotta

$\underline{t}$ = campo tangente unitario su ∂S

s = arcolunghezza su ∂S

$\underline{F} : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\underline{F} \cdot \underline{N})\, dA =$$

$$= \int_{\partial S} (\underline{F} \cdot \underline{t})\, ds$$

Dimostrazione

$$\underline{R} = \mathrm{rot}\,\underline{F} = *(dF^\flat)$$

in effetti, nell'enunciato del teorema

dobbiamo scrivere

$$\underline{R} = \left(*(dF^\flat)\right)^\sharp = \text{campo vettoriale}$$

Come forma:

$$(\underline{R} \cdot \underline{N})\, dA = *(\underline{R}^\flat)$$

Adesso:

$$(\underline{R}\cdot\underline{N})\,dA = *(\underline{R}^\flat)$$

$$= *\left[\left(\left(*(dF^\flat)\right)^\sharp\right)^\flat\right] \to \text{sono inversi l'uno dell'altro}$$

$$= *\left[*(dF^\flat)\right]$$

$$= **(d(F^\flat)) = d(F^\flat)$$

Quindi:

$$\int_S (\text{rot}\,\underline{F}\cdot\underline{N})\,dA =$$

$$= \int_S d(\underline{F}^\flat) \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} F^\flat$$

ma:

$$F^\flat = F_1\,dx + F_2\,dy + F\,dz$$

sulla curva ∂S: $dx = t_1\,ds, \ldots$

$$F^\flat = (\underline{F}\cdot\underline{t})\,ds$$