Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 14 gennaio 2018

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 1**

Esercizio 1. (6 punti) Sia $X = \mathbb{R}$ e consideriamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X

$$A \in \mathcal{T} \iff A = \emptyset \text{ oppure } X \setminus A \text{ è compatto nella topologia euclidea}$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.

(b) Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ è separabile.

(c) $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff?

(d) Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ è compatto.

Esercizio 2. (7 punti) Consideriamo il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con la topologia usuale, e sia A una retta proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Sia X lo spazio topologico quoziente

$$X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})/A,$$

ovvero X è il quoziente del piano proiettivo rispetto alla relazione d'equivalenza $p \sim q$ sse $p = q$ o $p, q \in A$. Calcolare il gruppo fondamentale di X. *(Suggerimento: considerare il modello piano di* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$*.)*

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,c\,e\,b^{-1}\,d^{-1}\,a^{-1}\,c^{-1}\,e^{-1}\,b\,d$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Consideriamo le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & k+1 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 \\ k-1 & 0 & k \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 0 & k & k-2 \\ k+1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

(a) Determinare per quali valori di k le matrici A e B sono simili.

(b) Per $k = 2$, determinare una base che mette A in forma di Jordan.

Esercizio 5. (7 punti) Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ consideriamo i punti $P_1 = [0 : 1 : 0]$ e $P_2 = [0 : 0 : 1]$ e le rette $r_1 : x_0 - x_2 = 0$ e $r_2 : 2x_0 - x_1 = 0$. Si mostri che l'insieme

$$\mathcal{F} = \{\text{coniche } C \text{ tangenti a } r_i \text{ in } P_i, i = 1, 2\}$$

è un sistema lineare, e se ne calcoli la dimensione.