Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 16 luglio 2019

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 1**

Esercizio 1. (7 punti) Sia (X, τ) uno spazio topologico e $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ una famiglia di chiusi di X. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di X data da:

$$\tau_{\mathcal{C}} = \{U \subseteq X \mid U \cap C_i \text{ è aperto in } C_i \text{ per ogni } i \in I\}.$$

(1) Mostrare che $\tau_{\mathcal{C}}$ è una topologia su X, più fine della topologia τ.

(2) Mostrare che $\tau_{\mathcal{C}}$ induce la topologia discreta su $Y := X \setminus \bigcup_{i\in I} C_i$.

(3) Poniamo $X = \mathbb{R}^2$, τ la topologia euclidea, $I = [0, +\infty)$, C_i la circonferenza di raggio i centrata nell'origine. Determinare l'interno e la chiusura di $Q = (-1, 1) \times (-1, 1)$ nella topologia $\tau_{\mathcal{C}}$.

Esercizio 2. (7 punti) Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1\right\}$$

e poniamo

$$X = A \cup B$$

(a) Sia $P = (0, 1) \in X$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, P)$.

(b) Dimostrare che A e B sono entrambi retratti di X.

(c) Dire se A oppure B è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 3. (6 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,a\,c\,e\,d\,b\,d\,c\,e^{-1}$$

1. Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

2. Sia T una superficie topologica connessa e compatta tale che $\chi(T) = \chi(S)$. Le superfici S e T sono necessariamente omeomorfe?

Esercizio 4. (6 punti) Sia A una matrice quadrata complessa con polinomio caratteristico

$$c_A(t) = (t-2)^2(t-3)^3(t-4)^4$$

e (esattamente) quattro autovettori linearmente indipendenti.

Determinare tutte le possibili forme di Jordan che rispettano le informazioni date. Per ognuna delle forme trovate, indicare il polinomio minimo corrispondente.

Esercizio 5. (6 punti) Determinare le equazioni di tutte le proiettività del piano proiettivo reale aventi come insieme dei punti fissi:

$$\{(x_0 : x_1 : x_2) \,|\, x_1 = x_2\} \cup \{(2 : 1 : 0)\}.$$