Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 15 febbraio 2017

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (6 punti) Sia $Y = \mathbb{R}^2$ e consideriamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di Y

$$A \in \mathcal{T} \iff \big[(x,y) \in A \implies (-x,y) \in A\big]$$

cioè $A \in \mathcal{T}$ se e solo se A è simmetrico rispetto all'asse y.

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su Y.

(b) Sia $A = \{(x,y) \in Y \mid x = 0\}$. Dimostrare che la topologia indotta da $\mathcal{T}$ sul sottospazio A è la topologia discreta.

(c) Sia $B = \{(x,y) \in Y \mid y = 0\}$. Dimostrare che la topologia indotta da $\mathcal{T}$ sul sottospazio B **non** è la topologia discreta, e che B non è di Hausdorff.

(d) Sia $C = \{(x,y) \in Y \mid y = 0 \text{ e } -1 < x < 2\}$. Determinare la chiusura e la parte interna di C in Y.

Esercizio 2. (6 punti) In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, si considerino i sottospazi:

$$A = \{(x, n) \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \quad \text{e} \quad B = \left\{(x, y) \mid y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}.$$

Si consideri inoltre l'applicazione continua $g : A \to B$ definita da

$$g(x, n) = \left(x, \frac{x}{n}\right).$$

(1) A è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?

(2) B è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?

(3) Sia $C = \{(x, 1) \in A \mid -1 < x < 1\}$; C è aperto in A? $g(C)$ è aperto in B?

Esercizio 3. (6 punti) Sia $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario chiuso e $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ il suo bordo.

(a) Sia $z \in D^2$. Dimostrare che $D^2 - \{z\}$ è semplicemente connesso se e solo se $z \in S^1$.

(b) Utilizzando il punto precedente dimostrare che se $f : D^2 \to D^2$ è un omeomorfismo, allora $f(S^1) = S^1$.

Esercizio 4. (4 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,c\,d\,e\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1}\,e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $A \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ la matrice definita da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare il polinomio minimo $m_A(t)$ e il polinomio caratteristico $c_A(t)$.

(b) Determinare la forma canonica di Jordan della matrice A.

(c) Sia $B \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ tale che $m_B(t) = m_A(t)$ e $c_B(t) = c_A(t)$. Dimostrare che le matrici A e B sono simili.

Esercizio 6. (5 punti) Nel piano proiettivo reale, con coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : x_2]$, consideriamo la retta r di equazione $x_0 - x_1 = 0$.

Determinare tutte le proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r) = r$, $f(1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$, e $f(2 : 1 : 0) = (2 : 1 : 0)$.

(NOTA BENE: l'insieme r è fissato come insieme e non necessariamente punto per punto)