Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 18 luglio 2018

**COGNOME** .................... **NOME** .........................

**CORSO** ........................ **Versione 1**

**Esercizio 1.** (8 punti) Consideriamo l'insieme $X = [0,2) \subset \mathbb{R}$ e la famiglia di sottoinsiemi di $X$:

$$\mathcal{T} = \{[0,a) \mid 0 \leq a \leq 2\}.$$

N.B. per $a = 0$, $[0,0) = \emptyset$.

$(a)$ Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $X$.

$(b)$ Dare un esempio di intersezione (arbitraria) di elementi di $\mathcal{T}$ che non appartenga a $\mathcal{T}$.

$(c)$ Dimostrare che la chiusura di $A = [1,3/2]$ è $[1,2)$ e che l'interno di $A$ è l'insieme vuoto.

$(d)$ Dire se $(X,\mathcal{T})$ è di Hausdorff.

$(e)$ Dire se $(X,\mathcal{T})$ è separabile.

**Esercizio 2.** (6 punti) Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea)

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 1\big\}$$
$$B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 1\big\}$$

e poniamo

$$X = A \cup B$$

$(a)$ Sia $P = (1,0) \in X$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X,P)$.

$(b)$ Dimostrare che $A$ non è un retratto di deformazione di $X$.

**Esercizio 3.** (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,c\,d\,e\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1}\,e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di $S$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

**Esercizio 4.** (7 punti) Sia $A$ una matrice quadrata complessa $6 \times 6$. Dire quali delle seguenti affermazioni possono verificarsi, motivando la risposta:

($a$) il polinomio minimo di $A$ è $(t-2)^5$, e l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 3;

($b$) il polinomio minimo di $A$ è $(t-2)(t-3)^3$, e l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 3;

($c$) $A$ ha polinomio caratteristico $(t-2)^6$ e $A^2 - A - I_6 = 0$;

($d$) $A^2 - A - I_6 = 0$ e $A$ ha degli autovalori non reali.

**Esercizio 5.** (6 punti) Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con coordinate $(x, y)$, e la sua chiusura proiettiva con le coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$.

(1) Sia $f$ la rotazione attorno all'origine in $\mathbb{R}^2$ che porta il punto $(1, 0)$ nel punto $(0, 1)$. Si estenda $f$ a una proiettività $F$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e se ne trovino i punti fissi. Ci sono rette fisse per $F$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

(2) Si consideri la conica $\Gamma$ in $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$x^2 + y^2 + 2xy - y = 0.$$

Determinare l'equazione della chiusura proiettiva di $\Gamma$, i punti all'infinito di $\Gamma$, e indicare a quale famiglia di coniche $\Gamma$ appartiene.