

Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 0 – a.a. 2019-20

Gli esercizi di questo foglio verranno discussi nel tutorato di mercoledì 2 ottobre e non sono da consegnare.

Esercizio 1. Sia I un insieme arbitrario, sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Siano inoltre $A, A_i \subseteq X$ e $B, B_i \subseteq Y$. Dimostrare le seguenti formule:

1. $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$
2. $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
3. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$
4. $f(f^{-1}(A)) \subseteq A, \quad B \subseteq f^{-1}(f(B))$

Esercizio 2. Siano X, Y due insiemi, $A \subseteq X$ e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. È vero che

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)?$$

Esercizio 3. Siano X, Y due insiemi e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Dimostrare che:

1. f è iniettiva $\iff f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ per ogni $A, B \subseteq X$ $\iff f^{-1}(f(C)) = C$ per ogni $C \subseteq X$
2. f è suriettiva $\iff f(f^{-1}(D)) = D$ per ogni $D \subseteq Y$

Esercizio 4. Quale delle seguenti funzioni è una metrica su \mathbb{R} ?

1. $d(x, y) = |x^2 - y^2|$
2. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$
3. $d(x, y) = e^{x-y}$
4. $d(x, y) = |x - 3y|$

Esercizio 5. Consideriamo \mathbb{R} con la topologia euclidea (quella dell'Analisi).

1. Trovare la chiusura di $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (0, 1]$ e $\{1\} \cup (2, 3]$
2. Trovare l'interno di $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $(0, 1]$
3. È vero che

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^\circ = \left(\bigcup_{i \in I} A_i^\circ\right)$$

oppure

$$\overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)} = \left(\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}\right)?$$