Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 1 – a.a. 2019-20

Da consegnare: mercoledì 9 ottobre 2019

Esercizio 1. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato (e cioè la relazione $\leq$ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva). Mostrare che i sottoinsiemi

$$M_x = \{y \in X \mid x \leq y\}$$

formano, al variare di $x \in X$, una base di una topologia.

Esercizio 2. Nel piano $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia $\mathcal{T}$ formata dall'insieme vuoto, da $\mathbb{R}^2$ e da tutti i dischi senza bordo $D_r = \{x^2+y^2 < r^2\}$, per $r > 0$. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}^2$ e determinare la chiusura dell'iperbole di equazione $xy = 1$.

Esercizio 3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{B}_1 = \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon < 1\}$$

delle palle aperte di raggio minore di 1 e centro arbitrario è una base per la topologia indotta dalla distanza.

Esercizio 4. Uno spazio topologico si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso (in particolare, tutti i punti sono chiusi). Dimostrare che uno spazio topologico X è **T1** se e solo se per ogni $x \in X$ si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$$

(l'intersezione di tutti gli intorni di un punto è solo il punto stesso).

Dimostrare che ogni spazio metrico è **T1**.

Esercizio 5. Due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico X si dicono **separati** se

$$A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$$

Dimostrare che:

1. Se F, $G \subseteq X$ sono entrambi aperti o entrambi chiusi, allora $A = F - G$ e $B = G - F$ sono separati.
2. Se $A, B \subseteq X$ sono separati, allora A e B sono entrambi aperti e chiusi in $A \cup B$.

Esercizio 6. Sia X uno spazio metrico. Dimostrare che una palla aperta di raggio 1 non può contenere propriamente una palla aperta di raggio 2.

Trovare, o dimostrare che non esiste, uno spazio metrico con una palla aperta di raggio 2 che contiene propriamente una palla aperta di raggio 3.

Esercizio 7. Due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico si dicono *aderenti* se

$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \neq \emptyset$$

(cioè se la chiusura di almeno un insieme interseca l'altro).

Dimostrare che una funzione continua $f : X \to Y$ preserva la relazione di aderenza, cioè per ogni coppia di insiemi A, $B \subseteq X$ aderenti le immagini $f(A)$ e $f(B)$ sono aderenti (le funzioni continue non "strappano" lo spazio).

Viceversa, dimostrare che se $f : X \to Y$ è una funzione fra spazi topologici **T1** che preserva la relazione di aderenza allora f è continua (vedi Esercizio 4 per la definizione di spazio **T1**).

Suggerimento: (studiare ed) usare il Lemma 3.25.