Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 3 – a.a. 2019-20

Da consegnare: mercoledì 23 ottobre 2019

Esercizio 1. Sia X con la topologia discreta. Dimostrare che X è compatto se e solo se X è finito.

Esercizio 2. (Esercizio 3, compito del 15 giugno 2016) Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Dimostrare che f è continua (nella topologia euclidea) se e solo se il grafico di f è compatto.

Trovare un esempio di funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ discontinua il cui grafico sia chiuso (ma non compatto, naturalmente).

Esercizio 3. (Esercizio 3, compito del 7 luglio 2016) Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Dimostrare che S è compatto se e solo se ogni funzione $f : S \to \mathbb{R}$ continua ammette massimo. Suggerimento: ricordare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Esercizio 4. Considerare gli spazi topologici degli esercizi 1–5 del foglio ESERCITAZIONI 1 (vedi Moodle, prima settimana) e per ognuna di essi dire se è connesso oppure compatto.

Suggerimento: A volte le proprietà della topologia illustrate nel testo dell'esercizio suggeriscono subito la risposta.

Esercizio 5. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice

1. **limitato** se esiste un numero reale $R > 0$ tale che A è contenuto in una palla aperta di raggio R;
2. **totalmente limitato** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di A composto da palle aperte di raggio ε.

Dimostrare che:

1. A totalmente limitato $\implies$ A limitato;
2. A compatto $\implies$ A chiuso e totalmente limitato;
3. se $X = \mathbb{R}^n$ allora A limitato $\implies$ A totalmente limitato;
4. se $X = \mathbb{Q}$ (con la metrica indotta dalla metrica di $\mathbb{R}$) allora

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

è chiuso e totalmente limitato ma non è compatto.

Esercizio 6. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (con la topologia euclidea) un sottoinsieme *aperto* e sia $a \in U$. Definiamo

$$C_a = \{x \in U \mid \text{ esiste un cammino contenuto in } U \text{ che congiunge } a \text{ e } x\}$$

(C_a è la *componente connessa per archi* di a).

1. Dimostrare che C_a è aperto in U (nella topologia di sottospazio) per ogni $a \in U$.
2. Dimostrare che C_a è chiuso in U (nella topologia di sottospazio) per ogni $a \in U$.
3. Dedurre che un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $X = \{a, b\}$ un insieme formato da due elementi distinti e dotato della topologia banale. Sia $Y = \mathbb{R} \times X$ lo spazio topologico prodotto.

1. Scrivere una base per la topologia di Y.
2. Dire se Y è T_1, se è connesso, e se è compatto.
3. Consideriamo i seguenti sottospazi di Y:

$$Z = \big((-1, 1) \times \{a\}\big) \cup \big([-2, 2] \times \{b\}\big),$$
$$W = \big((-1, 1) \times \{a\}\big) \cup \big((-2, 2) \times \{b\}\big).$$

   Stabilire se Z e W sono compatti.