**Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2**

**Esercitazione n. 4 - 22 ottobre 2019**

**Esercizio 1.** Sia $X$ uno spazio topologico e sia $I$ l'intervallo chiuso $[0,1]$ con la topologia euclidea. Poniamo $Z = X \times \{0\} \subseteq X \times I$. Indichiamo con $Y$ il quoziente $(X \times I)/Z$ (cioè modulo la relazione di equivalenza che identifica $Z$ ad un punto). Lo spazio $Y$ viene solitamente chiamato il *cono* su $X$.

1. Dimostrare che $Y$ è connesso per archi.
2. Dimostrare che se $X$ è compatto allora $Y$ è compatto
3. Dimostrare che se $X$ è compatto e di Hausdorff, allora $Y$ è di Hausdorff.

**Esercizio 2.** Mostrare che, al variare di $A$ fra i sottoinsiemi dell'intervallo $[0,1]$ formati da due punti distinti, lo spazio quoziente $[0,1]/A$ può assumere tre diverse classi di omeomorfismo.

**Esercizio 3.** In $\mathbb{R}^2$, con la topologia euclidea, consideriamo i seguenti sottoinsiemi:

- $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$
- $F = \{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\}$

Per ognuno dei seguenti spazi topologici dire se è di Hausdorff, compatto, connesso, connesso per archi, motivando la risposta:

$(a)$ $X = \mathbb{R}^2/C$

$(b)$ $Y = \mathbb{R}^2/(C \cup F)$

**Esercizio 4.** (Manetti, Esempio 5.10) Sia $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ la circonferenza unitaria (pensata come numeri complessi di norma 1) e sia $X = S^1 \times [0,1]$. Definiamo la seguente relazione su $X$

$$(x,t) \sim (y,s) \iff tx = sy$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo al disco unitario chiuso $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

**Esercizio 5.** Una funzione continua $f : X \to Y$ è detta *propria* se per ogni compatto $K \subseteq Y$ la controimmagine $f^{-1}(K)$ è compatta.

Sia ora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua propria (la topologia su $\mathbb{R}$ è quella euclidea). Dimostrare che $f(\mathbb{N})$ non è limitato.

**Esercizio 6.** Sia $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il gruppo di omeomorfismi di $S^1$ in sé generato dalla moltiplicazione per $-1$. Dimostrare che il quoziente $S^1/G$ è omeomorfo a $S^1$. Fare lo stesso con il gruppo ciclico $C_n$, generato dalla rotazione di $2\pi/n$.