**Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2**

**Foglio di esercizi n. 9 – a.a. 2019-20**

Da consegnare mercoledì 4 dicembre

**Esercizio 1.** Per ciascuna delle seguenti coppie di matrici, dimostrare che sono simultaneamente diagonalizzabili e trovare una base comune di autovettori:

1. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 2.** Per ognuna delle seguenti matrici (di cui è anche dato il polinomio caratteristico), trovare una matrice invertibile $P$ e una matrice in forma di Jordan $J$ tali che $A = PJP^{-1}$:

1. $$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -9 \\ 4 & 10 & 13 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad c_A(t) = (t-3)^3$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad c_A(t) = (t-4)^3$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c(t) = (t-2)^3$$

**Esercizio 3.** Per ognuna delle seguenti matrici, calcolare l'esponenziale:

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ Suggerimento: calcolare il polinomio caratteristico.

4. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ Suggerimento: in quale base $A$ è in forma di Jordan?

**Esercizio 4.** In questo esercizio tutte le matrici considerate sono matrici quadrate complesse. Useremo le seguenti notazioni: per un autovalore $\lambda$ della matrice $A$ indichiamo con

1. max-dim$(\lambda)$ = dimensione massima di un blocco di autovalore $\lambda$
2. molt-alg$(\lambda)$ = molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda$
3. molt-geom$(\lambda)$ = molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda$
4. $c_A(t)$ = polinomio caratteristico della matrice $A$
5. $m_A(t)$ = polinomio minimo della matrice $A$

Per ognuna delle seguenti condizioni, determinare tutte le possibili forme di Jordan che rispettano le informazioni date.

1. molt-alg$(8) = 6$, molt-geom$(8) \leq 3$, max-dim$(8) = 3$
2. $c_A(t) = (t-2)^5(t-3)^4$, molt-geom$(2) = 3$, max-dim$(3) = 2$
3. molt-alg$(5) = 8$, molt-geom$(5) \leq 4$, max-dim$(5) = 4$
4. $A$ di ordine 8, $m_A(t) = (t-1)^3(t-4)^2$
5. $c_A(t) = (t-1)^4(t-2)^4$, $A$ ha 4 autovettori linearmente indipendenti
6. $c_A(t) = (t-2)^2(t-3)^3(t-4)^4$, $\deg m_A(t) = 4$
7. $\deg c_A(t) = 5$, $\deg m_A(t) = 3$
8. $\deg c_A(t) = 5$, $A$ ha 3 autovettori linearmente indipendenti
9. $\deg c_A(t) = 6$, $A$ ha 2 autovalori distinti e 4 autovettori linearmente indipendenti
10. $c_A(t) = (t-1)^3(t-3)^5$, $A$ ha 3 autovettori linearmente indipendenti
11. molt-alg$(5) = 8$, molt-geom$(5) \leq 5$, max-dim$(5) = 3$
12. molt-alg$(3) = 6$, molt-geom$(3) \leq 4$, max-dim$(3) = 2$
13. molt-alg$(5) = 4$, molt-geom$(5) \leq 2$, max-dim$(5) = 2$