Esercizi di Istituzioni di Geometria
Anno Accademico 2019–2020

Primo modulo.

[1] Si considerino su $\mathbb{R}$ le strutture differenziali indotte dai seguenti atlanti formati da una sola carta:

- $(\mathbb{R}, \varphi_1)$, dove $\varphi_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'identità;
- (R, φ_2), dove $\varphi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_2(x) = x^3$.

Si indichi con $\mathbb{R}_{\varphi_i}$, $\mathbb{R}$ con la struttura differenziabile indotta da φ_i.
Si dimostri che

1. L'identità $\mathbb{R}_{\varphi_1} \to \mathbb{R}_{\varphi_2}$ non è un diffeomorfismo (quindi le strutture differenziali determinate da $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ e $(\mathbb{R}, \varphi_2)$ sono distinte).
2. Si esibisca un diffeomorfismo $f \colon \mathbb{R}_{\varphi_1} \to \mathbb{R}_{\varphi_2}$. (Si deduca che le strutture differenziali determinate da $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ e $(\mathbb{R}, \varphi_2)$ sono diffeomorfe).

[2] Si dimostri che la sfera S^n è una varietà differenziabile.

[3] Si dimostri che $\mathbb{RP}^n$ è una varietà differenziabile.

[4] Si dimostri che $\mathbb{RP}^1$ è diffeomorfo a S^1.

[5] Si dimostri che $\mathbb{CP}^n$ è una varietà differenziabile.

[6] Si dimostri che $\mathbb{CP}^1$ è diffeomorfo a S^2.

[7] Si dimostri che $S \subseteq M$ è una sottovarietà e $F \colon M \to N$ è una funzione C^∞, la restrizione di F a S è C^∞ e la restrizione del differenziale di F è il differenziale della restrizione.

[8] Si dimostri che la proiezione $\pi \colon S^n \to \mathbb{RP}^n$ è un diffeomorfismo locale.

[9] Si dimostri che $\mathbb{S}^n \backslash \{\text{due punti}\}$ è diffeomorfa al cilindro $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

[10] Si dimostri che ogni funzione C^∞ tra due varietà è continua.

[11] Si dimostri la composizione di funzioni C^∞ tra varietà è C^∞.

[12] Siano M, N varietà differenziabili. Si dimostri che $M \times N$ è una varietà differenziabile; che $M \times N$ e $N \times M$ sono diffeomorfe; le poiezioni sui singoli fattori sono C^∞; M è una sottovarietà embedded in $M \times N$.

[13] Si trovi un'immersione esplicita di $(0, 1)$ in S^2 che non è un embedding.

[14] Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ lo spazio delle matrici reali 2×2 e

$$A := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Sia inoltre $T_A \colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ la mappa $X \mapsto AX$. Si verifichi che T_A è C^∞ e si trovi

$$T_{A*}\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

[15] Si dimostri che l'insieme delle matrici $n \times m$ avente rango j è una sottovarietà dello spazio vettoriale delle matrici $n \times m$.

[16] Si dimostri che TS^1 è diffeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

[17] Si dimostri che $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettoriale $\wedge$ è un'algebra di Lie.
Dati i campi su $\mathbb{R}^3$

$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

si verifichi che $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{X, Y, Z\}$ con l'usuale bracket di spazi vettoriali definisce un algebra di Lie isomorfa a $(\mathbb{R}^3, \wedge)$.

[18] Si dica se l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1, \quad z = xy,$$

in $\mathbb{R}^3$ una varietà differenziabile.

[19] Si trovi un esempio di una varietà M che ammette un sottoinsieme A e una funzione $f \in C^\infty(A)$ che non può essere estesa a una funzione differenziabile definita su tutto M.

[20] Si dimostri che in una varietà differenziabile connessa coppie di punti si collegano con curve C^∞ a tratti.

[21] Dato $\varepsilon > 0$ si costruisca un diffeomorfismo $\psi\colon [-\varepsilon, 1+\varepsilon] \to [-1, 2]$ che sia l'identità su $[0, 1]$.

[22] Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione liscia con differenziale di rango costante. Si dimostri che

- se F è surgettiva, allora è una sommersione;
- se F è bigettiva, allora è un diffeomorfismo.

[23] Si dimostri che l'insieme delle matrici 2×2 aventi determinante nullo non è una sottovarietà dello spazio vettoriale delle matrici 2×2.

Secondo modulo.

[24] Sia $F\colon M \to N$ una mappa liscia tra varietà differenziabili e $\pi\colon E \to N$ un fibrato vettoriale. Si definisce

$$F^*(E) = \{(p, e) \in M \times E \;:\; \pi(e) = F(p)\}\,.$$

Si dimosrtri che $F^*(E)$ ha una naturale struttura di fibrato vettoriale su M (detto *fibrato pull-back*).

[25] Sia M una varietà differenziabile, $S \subseteq M$ una sottovarietà e $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale. Si dimostri che $\pi_S\colon \pi^{-1}(S) \to S$ definisce un fibrato vettoriale su S. Si trovino le mappe di cocliclo di questo fibrato.

[26] Sia M una varietà differenziabile, $S \subseteq M$ una sottovarietà e $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale. Si dimostri che l'unione disgiunta degli spazi vettoriali T_pM/T_pS, al variare di p in S, ha una naturale struttura di fibrato vettoriale su S. Si trovino le mappe di cocliclo di questo fibrato.

[27] Si trovi il flusso dei seguenti campi vettoriali su $\mathbb{R}^2$:

$$y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\,, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

[28] Si dimostri che il gruppo dei diffeomorfismi della palla aperta B agisce transitivamente su B. (*Suggerimento*, si dimostri che dato $p \in M$ si dimostri che l'insieme dei punti q di M per cui esiste un diffeomorfismo φ di B tale che $\varphi(p) = q$ è aperto e chiuso in B).

[29] Si dimostri che ogni curva integrale massimale è iniettiva, periodica, o costante.

[30] Sia $S \subseteq M$ un'ipersuperficie compatta, e $X \in \Gamma(M)$ un campo vettoriale trasverso a S ($X_p \notin T_pS$ per ogni $p \in S$). Si dimostri che esiste un $\epsilon > 0$ tale che il flusso di X si restringe ad un diffeomorfismo fra $(-\epsilon, \epsilon) \times S$ e un intorno di S in M.

[31] Sia $F\colon M \to N$ un'applicazione di classe C^∞ fra varietà, $X \in \Gamma(M)$ e $Y \in \Gamma(N)$. Indichiamo con $\varphi\colon \mathcal{U} \to M$ il flusso di X e con $\psi\colon \mathcal{V} \to N$ il flusso di Y. Si dimostra che Y è F-riferito a X se e solo se per ogni t risulta in $\psi_t \circ F = F \circ \varphi_t$.

[32] Sia $F\colon M \to N$ una sommersione. Si dimostri che per ogni $X \in \Gamma(N)$ esiste un campo vettoriale $Y \in \Gamma(M)$ che è F-riferito a X. Si dimostri che in generale Y non è unico.

[33] Sia $F\colon M \to N$ una sommersione suriettiva. Sia $X \in \Gamma(M)$ tale che $F_{*|p}(X_p) = F_{*|q}(X_q)$ per ogni $p, q \in M$ tali che $F(p) = F(q)$. Si dimostri che esiste un unico $Y \in \Gamma(N)$ che è F-riferito a X.

[34] Data l'applicazione differenziabile $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$(u, v) \mapsto (2v - u^2, 3u, 4u + v^2)$$

e la 2-forma differenziale

$$\omega = ydx \wedge dy - zdz \wedge dx + xdx \wedge dy$$

si calcoli $f^*(\omega)$.

[35] Si dimostri che la 1-forma su $\mathbb{R}^3$

$$\omega = e^{y^2} dx + 2xye^{y^2} dy - 2zdz.$$

è chiusa. Dire se è anche esatta.

[36] Sia M una varietà differenziabile e $\alpha \in \Omega^r(M)$. Si verifichi che vale la seguente formula

$$d\alpha(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j+1} X_j \left(\alpha(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1})\right) \\ + \sum_{1 \le i < j \le r+1}^{r+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1})$$

per ogni $X_1, \dots, X_{r+1}$ in $\Gamma(M)$.

[37] Sia $\pi\colon M \to N$ un rivestimento C^∞ tra varietà differenziabili. si verifichi che $\pi^*\colon \Omega(N) \to \Omega(M)$ è iniettiva.

[38] Sia $\pi\colon M \to N$ un rivestimento C^∞ il cui gruppo di automorfismi agisca transitivamente sulle fibre (cioé per ogni p, q in M tali che $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ esiste un diffeomorfismo $\gamma\colon M \to M$ tale che $\pi \circ \gamma = \pi$ e $\gamma(p_1) = p_2$). Si dimostri che una forma differenziale $\omega \in \Omega(M)$ soddisfa $\omega = \pi^*(\eta)$ per una qualche forma $\eta \in \Omega(N)$ se e solo se $\gamma^*(\omega) = \omega$ per ogni automorfismo γ del rivestimento.

[39] Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Provare che il fibrato delle n-forme differenziali è banale se e solo se M è orientabile.

[40] Sia ω una 1-forma differenziale su una varietà differenziabile M e si consideri una funzione ovunque non nulla $f\colon M \to \mathbb{R}$ tale che $d(f\omega) = 0$. Provare che $\omega \wedge d\omega = 0$.

[41] Si consideri la $1-$forma differenziale su $\mathbb{R}^4$

$$\alpha = xdy - ydx + zdt - tdz$$

e sia

$$i\colon S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\} \to \mathbb{R}^4$$

l'inclusione. Provare che $i^*\alpha$ non si annulla in nessun punto.