Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 11 - 10 dicembre 2019

Esercizio 1. Nel piano proiettivo reale, con coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : x_2]$, consideriamo la retta r di equazione $x_0 - x_1 = 0$. Determinare tutte le proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r) = r$, $f(1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$, e $f(2 : 1 : 0) = (2 : 1 : 0)$.

Esercizio 2. Sia f una proiettività di $\mathbb{P}^1(K)$.

1. Se
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
è una matrice associata a f, si verifichi che f è una involuzione (ossia $f^2 = \mathrm{id}$) diversa dall'identità se e solo se $a + d = 0$.

2. Supponiamo che f sia una involuzione diversa dall'identità. Si mostri che f ha esattamente 0 o 2 punti fissi, e che se $K = \mathbb{C}$ ha esattamente 2 punti fissi.

Esercizio 3. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x, y) e la sua chiusura proiettiva con le coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la simmetria rispetto all'asse y. Si estenda f a una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e se ne trovino i punti fissi. Ci sono rette fisse per F in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ i punti:
$$A = \left[-2 : 0 : -\frac{1}{2} : 3\right], \quad B = \left[\frac{1}{2} : 1 : 3 : 2\right], \quad C = \left[\frac{1}{6} : 3 : \frac{26}{3} : 8\right].$$
Verificare che appartengono tutti a una stessa retta proiettiva r e determinare il punto $P \in r$ tale che il birapporto
$$\beta(A, B, C, P) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ una proiettività data da
$$f([x_0 : x_1]) = [x_0 - x_1 : 2x_0 + 4x_1].$$

1. Determinare i punti fissi di f.
2. Detti A e B i punti fissi e $Q = [1 : 1]$, calcolare il birapporto $\beta(A, B, Q, f(Q))$.