Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 11 – a.a. 2019-20

Da consegnare mercoledì 18 dicembre

Esercizio 1. Determinare la proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f((1:1)) = (1:-1), \quad f((2:0)) = (1:1), \quad f((1:-1)) = (2:1).$$

Esercizio 2. Determinare la proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f((1:2:1)) = (1:1:1),$$

dove $r\colon x_0 - x_1 = 0,\ r'\colon x_0 + x_1 = 0,\ s\colon x_0 + x_1 + x_2 = 0,\ s'\colon x_1 + x_2 = 0.$

Esercizio 3. *(es. 5 dallo scritto di giugno 2019)* Consideriamo i seguenti punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$p_1 = (1 : \sqrt{3} : 0), \quad p_2 = (-\frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \sqrt{2}), \quad p_3 = (0 : -7 : 1),$$
$$q_1 = (2 : \frac{1}{3} : 0), \quad q_2 = (6 : -1 : 1), \quad q_3 = (0 : 1 : a)$$

dove $a \in \mathbb{R}$.

1. Dire per quali valori di a esiste una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $F(p_i) = q_i$ per $i = 1, 2, 3$;
2. per tali valori di a, dire se F è unica.

Esercizio 4. Siano r e s due rette nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ e sia $g\colon r \to s$ una trasformazione proiettiva. Siano poi $P, Q \in \mathbb{P}^2$ due punti tali che $P \notin r$ e $Q \notin s$. Mostrare che esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^2$ che estende g e tale che $f(P) = Q$.