Istituzioni di Geometria, a.a. 19/20, esercizi di geometria algebrica

Esercizio 1. Siano L_1 e L_2 due sottospazi lineari di $\mathbb{A}^n$ tali che $L_1 \cap L_2 = \{p\}$. Siano $X_1 \subseteq L_1$ e $X_2 \subseteq L_2$ due insiemi algebrici contenenti p. Infine siano $f_1 \in \mathcal{O}(X_1)$ e $f_2 \in \mathcal{O}(X_2)$ due funzioni tali che $f_1(p) = f_2(p)$. Mostrare che esiste $f \in \mathcal{O}(X_1 \cup X_2)$ tale che $f_{|X_i} = f_i$.

Esercizio 2. Sia $X = V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Mostrare che X può essere identificata con un aperto di $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ (nella topologia di Zariski).

Esercizio 3. Sia $X \subset \mathbb{A}^2$ la curva di equazione $y^2 = x^2 + x^3$ e sia $f\colon \mathbb{A}^1 \to X$ la mappa definita da $f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Mostrare che l'omomorfismo f^* mappa $\mathcal{O}(X)$ isomorficamente nel sottoanello di $k[t]$ formato dai polinomi $g(t)$ tali che $g(1) = g(-1)$. (Supponiamo k di caratteristica zero.)

Esercizio 4.

Si dimostrino le seguenti affermazioni:

(a) Un punto di $\mathbb{A}^n = k^n$ è una varietà affine.

(b) Ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{A}^n$ è una varietà affine.

(c) L'insieme $X = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ non è una varietà affine.

(d) L'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ non è una varietà affine.

Esercizio 5.

(a) Dati n, m interi positivi, dimostrare che il radicale dell'ideale $(x^m, y^n) \subset k[x, y]$ è l'ideale (x, y).

(b) Siano $f, g \in k[x, y]$ polinomi distinti, non costanti. È sempre vero che il radicale dell'ideale $I = (f^2, g^3)$ è (f, g)?

Esercizio 6. Consideriamo la curva piana, affine, complessa $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$ di equazione:

$$y^3 + y^2 - x^3 = 0.$$

Determinare $I(C)$ e mostrare che C è irriducibile.

Esercizio 7. Sia $k = \mathbb{C}$, e sia $X = V(xw - yz) \subset \mathbb{A}^4$. Determinare $I(X)$ e mostrare che X è irriducibile.