GEOMETRIA 3

A.A 2015/16

PROVA SCRITTA DEL 18 LUGLIO 2016

[1] Sia $\alpha(s)$ una curva differenziabile in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata rispetto all'ascissa curvilinea s e supponiamo che la sua torsione $\tau(s)$ sia costante e non nulla. Si consideri la nuova curva

$$\tilde{\alpha}(s) = -\frac{1}{\tau}\mathbf{n} - \int \mathbf{b} ds,$$

dove $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ è il triedro fondamentale della curva α.

a. (2 punti) Provare che il versore tangente di $\tilde{\alpha}$ è parallelo al versore tangente $\mathbf{t}$ di α.

b. (3 punti) Provare che $\tilde{\alpha}$ ha curvatura constante $\pm\tau$.

Soluzione. *a. Il vettore tangente di $\tilde{\alpha}$ è dato da*

$$\tilde{\alpha}'(s) = -\frac{1}{\tau}\mathbf{n}'(s) - \mathbf{b}(s) = -\frac{1}{\tau}[-k(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s)] + \mathbf{b}(s) = \frac{1}{\tau}k(s)\mathbf{t}(s).$$

Quindi il versore tangente di $\tilde{\alpha}$ è parallelo al versore tangente $\mathbf{t}$ di α.

b. Si ha che la curvatura $\tilde{k}(s)$ di $\tilde{\alpha}$ è data da

$$\frac{\|\tilde{\alpha}'(s) \wedge \tilde{\alpha}''(s)\|}{\|\tilde{\alpha}'(s)\|^3}.$$

Usando

$$\tilde{\alpha}''(s) = \frac{1}{\tau}[k'(s)\mathbf{t}(s) + k(s)\mathbf{t}'(s)] = \frac{1}{\tau}[k'(s)\mathbf{t}(s) + k(s)^2\mathbf{n}(s)]$$

si ha

$$\tilde{\alpha}'(s) \wedge \tilde{\alpha}''(s) = \frac{k^3(s)}{\tau^2}\mathbf{b}(s)$$

e quindi che $\tilde{k}(s) = \pm\tau$.

[2] (6 punti) Provare il Lemma di Poincaré per 1-forme differenziali.

[3] (i) (2 punti) Dare la definizione di derivata covariante di un campo vettoriale rispetto ad un vettore tangente.

(ii) (5 punti) Dare la definizione di campo vettoriale parallelo lungo una curva su una superficie regolare e provare che il prodotto scalare di due campi vettoriali paralleli è costante.

[4] (3 punti) Data la funzione differenziabile $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x,y,z,w) = (yz, e^{xyzw})$$

e indicate con (u,v) le coordinate su $\mathbb{R}^2$, calcolare $F^*\omega$, con $\omega = uvdu \wedge dv$. La 2-forma $F^*\omega$ è chiusa?

Soluzione. *Si ha che*

$$\begin{aligned} F^*\omega &= yze^{xyzw} d(yz) \wedge d(e^{xyzw}) \\ &= yze^{xyzw}(-yz^2 w dx \wedge dy + xyz^2 dy \wedge dw \\ &\quad + xy^2 z dz \wedge dw + y^2 zw dx \wedge dz). \end{aligned}$$

La 2-forma $F^*\omega$ é chiusa poiché $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$ ed una 2-forma su $\mathbb{R}^2$ è chiusa.

[5] (5 punti) Definire la mappa di Gauss per una superficie regolare S e dimostrare che il differenziale della mappa di Gauss nel punto $P \in S$ è un endomorfismo simmetrico del piano tangente $T_P S$.

[6] Sia S la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u - v, u^2, v^2\right), \qquad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

a. (2 punti) Determinare il dominio D in modo che $\mathbf{x}$ sia una parametrizzazione regolare
b. (1 punto) Calcolare le curvature principali di S nel punto $P = \mathbf{x}(0,1)$.
c. (3 punti) Calcolare la curvatura normale di S nel punto $P = \mathbf{x}(0,1)$ nella direzione del vettore tangente alla curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, 2 - e^t)$

Soluzione.

a. Si ha $\mathbf{x}_u = (1, 2u, 0)$ e $\mathbf{x}_v = (-1, 0, 2v)$. Dunque l'unico punto in cui non sono linearmente indipendenti è $(0,0)$.

Dobbiamo però anche verificare cha la mappa sia iniettiva. Poiché

$$\mathbf{x}(u_1, v_1) = \mathbf{x}(u_2, v_2) \iff u_1 - v_1 = u_2 - v_2, \quad u_1^2 = u_2^2, \quad v_1^2 = v_2^2$$

si ha subito che deve essere

$$u_1 = \pm u_2, \quad v_1 = \pm v_2$$

Se $u_1 = u_2$, $v_1 = -v_2$ si ottiene, dalla prima condizione

$$u_2 - v_2 = u_1 - v_1 = u_2 + v_2$$

e quindi $v_2 = -v_2$ e cioè $v_2 = 0$. Da questo segue che $v_1 = 0 = v_2$ e ancora dalla stessa condizione $u_1 = u_2$.

Il caso $u_1 = -u_2$, $v_1 = v_2$ è analogo.

Se invece $u_1 = -u_2$, $v_1 = -v_2$ si ottiene

$$u_1 - v_1 = -u_2 + v_2 = u_2 - v_2$$

e cioè $u_1 - v_1 = 0$ e si vede che i punti di coordinate (t,t) e $(-t,-t)$ hanno la stessa immagine. Si deve quindi escludere una semiretta di origine $(0,0)$ e sulla diagonale. Per esempio, possiamo porre:

$$D = \mathbb{R}^2 - \{(t,t) \mid t \geq 0\}$$

b. Si ha

$$E = 1 + 4u^2, \quad F = -1, \quad G = 1 + 4v^2,$$

il campo normale

$$N = \frac{1}{\sqrt{4u^2v^2 + u^2 + v^2}}\,(2uv, -v, u)$$

le derivate seconde

$$\mathbf{x}_{uu} = (0,2,0), \quad \mathbf{x}_{uv} = (0,0,0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (0,0,2)$$

Calcolando nel punto $P = \mathbf{x}(0,1)$ si ha:

Prima forma $I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ Seconda forma $II = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Operatore forma $S = -dN_P = I^{-1} \cdot II = \begin{pmatrix} -5/2 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Poiché la matrice S è triangolare (inferiore) gli autovalori sono già sulla diagonale e quindi:

$\boxed{\text{Curvature principali: } 0 \text{ e } -5/2}$

(1) La curva passa per P per $t = 0$. Si ha $\alpha'(0) = \mathbf{x}_u - e^0 \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v$. Dunque il vettore tangente ha coordinate $(1,-1)$ e ha norma $\sqrt{8}$ (che si ottiene da $\mathbf{x}_u = (1,0,0)$ e $\mathbf{x}_v = (-1,0,2)$ oppure usando la prima forma).

Ponendo $\mathbf{u} = \dfrac{\alpha' 0}{\|\alpha' 0\|}$ si ha

$$k_n(\mathbf{u}) = II(\mathbf{u}) = \frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{4}$$

oppure

$$k_n(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix} -5/2 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix} -5/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{4}$$

dove il prodotto scalare si deve calcolare usando la prima forma.