GEOMETRIA 3

A.A 2015/16

PROVA SCRITTA DEL 16 SETTEMBRE 2016

[1]

(i) Sia $\alpha(s)$ una curva differenziabile parametrizzata rispetto all'ascissa curvilinea s e supponiamo che α abbia curvatura costante $k > 0$ e torsione nulla.

(a) (1 punto) Provare che

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k}\mathbf{n}(s)$$

è una curva costante, cioè $\gamma(s) = P_0$, per qualche punto fissato P_0.

(b) (3 punti) Usando (a), provare che la curva $\alpha(s)$ è parte di una circonferenza centrata nel punto P_0. Qual è il raggio della circonferenza?

(ii) (3 punti) Sia $\beta(t) = (\sin t, \cos t, t^2)$. Qual è il valore massimo della curvatura in ogni punto della curva?

[2] (5 punti) Provare che una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ è localmente il grafico di una funzione differenziabile.

[3] (i) (2 punti) Dare la definizione di pull-back mediante un'applicazione differenziabile $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di una k-forma differenziale ω su $\mathbb{R}^m$.

(ii) (4 punti) Data un'applicazione differenziabile $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, provare che $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$ per ogni k-forma differenziale ω su $\mathbb{R}^m$. Può il pull-back di una k-forma differenziale $F^*\omega$ essere esatta, senza che ω sia esatta?

[4] (3 punti) Sia S la superficie definita da $z = x^2 + y^2$ per $z \leq 4$. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, xz^3, 0)$ e $\mathbf{G} = \mathrm{rot}(\mathbf{F})$, usare il Teorema di Stokes per calcolare $\displaystyle\iint_S \mathbf{G} \cdot N \, d\sigma$.

[5] (5 punti) Definire la curvatura normale di una superficie e dimostrare la formula di Eulero.

[6] Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, dove I è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$. Sia $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ la funzione

$$\mathbf{x}(u,v) = (u,\, v + f(u),\, v - f(u))$$

definita sull'aperto $U = I \times I$ di $\mathbb{R}^2$.

(1) (2 punti) Provare che $\mathbf{x}(U)$ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ e calcolarne il versore normale in ogni punto (in particolare, mostrare che $\mathbf{x}$ è iniettiva).

(2) (2 punti) Calcolare l'espressione della prima e della seconda forma fondamentale di $\mathbf{x}$ in ogni punto.

(3) (2 punti) Calcolare la curvatura di Gauss e la curvatura media in ogni punto.