GEOMETRIA 3

A.A 2015/16

PROVA SCRITTA DEL 3 FEBBRAIO 2017

[1] Sia $\gamma(s)$ una curva parametrizzata rispetto all'ascissa curvilinea s con curvatura $k(s)$ non nulla in ogni punto. Si supponga che $\mathbf{t}(s)$ formi un angolo costante con un vettore (costante) fissato $\mathbf{a}$ di norma 1, cioè che $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{a} = \cos\theta$, con θ costante, per ogni s.

(i) (2 punti) Provare che $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{a} = 0$, per ogni s.

(ii) (2 punti) Provare che $\mathbf{a}$ può essere scritto come combinazione di $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ e trovarne i coefficienti della combinazione lineare.

(iii) (3 punti) Usare (ii) per provare che la curvatura $k(s)$ e la torsione $\tau(s)$ sono legate dalla relazione $\tau(s) = \pm(\cot\theta)k(s)$.

[2] (7 punti) Dare la definizione di valore regolare e valore critico per una funzione differenziabile f da un aperto U di $\mathbb{R}^n$ ad un aperto di $\mathbb{R}^m$, dando un esempio di valore critico. Per $n = 3$ e $m = 1$ provare che se $a \in f(U)$ è un valore regolare, allora $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$.

[3]

(i) (2 punti) Provare la relazione tra il rotore ed il differenziale esterno d su forme differenziali.

(ii) (2 punti) Provare la relazione tra divergenza ed il differenziale esterno d su forme differenziali.

[4] (3 punti) Date le forme differenziali

$$\alpha = zdx - xdy, \quad \beta = 2zdx \wedge dy,$$

calcolare $F^*\alpha$ e $F^*\beta$, dove $F(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$.

[5] (5 punti) Definire la mappa di Gauss per una superficie regolare $S \subseteq \mathbb{R}^3$ e dimostrare che il differenziale della mappa di Gauss nel punto $P \in S$ è un endomorfismo simmetrico del piano tangente $T_P S$.

[6] Sia S la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u^2 - v^2, u+v, u-v\right), \qquad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

(i) (2 punti) Determinare il dominio D in modo che $\mathbf{x}$ sia una parametrizzazione regolare (in particolare, $\mathbf{x}$ deve essere iniettiva sul dominio D).

(ii) (1 punto) Calcolare le curvature principali di S nel punto $P = \mathbf{x}(0,1)$.

(iii) (3 punti) Calcolare la curvatura normale di S nel punto $P = \mathbf{x}(0,1)$ nella direzione del vettore tangente alla curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, 2 - e^t)$