Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 9 luglio 2019

COGNOME .... **NOME** ....

Compito n. 1

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva (contenuta nel piano $z = 0$)

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]$$

1. stabilire per quali punti la curva non è regolare;
2. calcolare la lunghezza dell'arco di curva fra due punti singolari;
3. calcolare la curvatura nei punti regolari.

Soluzione.

1. Si ha

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= (-3\cos t^2 \sin t,\, 3\sin^2 t \cos t, 0) = 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t, 0) \\ \|\dot\alpha\| &= 3|\cos t| \cdot |\sin t| \end{aligned}$$

e quindi il vettore tangente è nullo per $t = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π. Ci sono quindi 4 punti singolari:

$$P_1 = (1, 0, 0), \qquad P_2 = (0, 1, 0), \qquad P_3 = (-1, 0, 0), \qquad P_4 = (0, -1, 0)$$

2. Per evidenti motivi di simmetria, i quattro archi in cui è divisa la curva hanno la stessa lunghezza. Scegliamo l'arco fra P_1 e P_2, che corrisponde all'intervallo $[0, \pi/2]$ per il parametro t. In questo intervallo $\cos t$ e $\sin t$ sono sempre positivi. La lunghezza è:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{\pi/2} \|\dot\alpha(t)\|\, dt = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2}\sin 2t\, dt = -\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3. La curvatura vale $k(t) = \dfrac{\|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha\|}{\|\dot\alpha\|^3}$. Calcoliamo la derivata seconda. Notiamo che

$$\dot\alpha(t) = 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t, 0) = (3\cos t \sin t)\,\mathbf{v}(t)$$

e usando la regola di Leibniz si ha

$$\ddot\alpha(t) = (3\cos t \sin t)\,\dot{\mathbf{v}}(t) + \frac{d}{dt}(3\cos t \sin t)\,\mathbf{v}(t)$$

perciò il prodotto esterno è

$$\dot\alpha \wedge \ddot\alpha = (9\cos^2 t\, \sin^2 t)\,\mathbf{v}(t) \wedge \dot{\mathbf{v}}(t)$$

Poiché $\mathbf{v}(t) = (-\cos t,\, \sin t, 0)$, $\dot{\mathbf{v}}(t) = (\sin t,\, \cos t, 0)$ e quindi

$$\|\mathbf{v}(t) \wedge \dot{\mathbf{v}}(t)\| = 1$$

In conclusione,

$$k(t) = \frac{9\cos^2 t\, \sin^2 t}{|3\cos t \sin t|^3} = \frac{1}{3|\cos t \sin t|}$$

Esercizio 2. (4 punti) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata per arcolunghezza. Ricordiamo che l'*indicatrice delle tangenti* di α è la curva data dal versore tangente

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$$

Sia ora $\sigma(t) = (a\cos t,\, a\sin t,\, bt)$ un'elica circolare retta. Dimostrare che l'indicatrice delle tangenti di σ è una circonferenza con centro sull'asse z e calcolarne il raggio.

Soluzione. Osserviamo che $\dot{\sigma}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ e la norma $|\sigma'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$ è costante. Dunque

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{|\dot{\sigma}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

è la parametrizzazione (non per arcolunghezza) dell'indicatrice delle tangenti.

Poniamo, per comodità, $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Allora l'indicatrice delle tangenti si scrive

$$\mathbf{t}(t) = \left(-\frac{a}{c}\sin t, \frac{a}{c}\cos t, \frac{b}{c}\right)$$

da cui si vede immediatamente che:

1. $\mathbf{t}(t)$ è una curva piana, giacente sul piano orizzontale $z = \dfrac{b}{c}$
2. $\mathbf{t}(t)$ è contenuta nel cilindro di equazione $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{c^2}$, che ha asse l'asse z
3. dunque $\mathbf{t}(t)$ è una circonferenza con centro $(0, 0, b/c)$ e raggio a/c.

Esercizio 3. (10 punti) Sia data la curva (contenuta nel piano $y = 0$)

$$\alpha(u) = (u,\, 0,\, \log u)$$

1. Costruire una parametrizzazione locale $(D, \mathbf{x})$ della superficie S generata dalla rotazione della curva α attorno all'asse z.

2. Trovare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di S.

3. Calcolare la curvatura normale nel punto $P = (1, 0, 0)$ e nella direzione del **versore** tangente alla curva $\gamma(t) = \mathbf{x}(t,\, 1 - t^2)$.

Soluzione.

1. La parametrizzazione standard della superficie di rotazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v,\, u \sin v,\, \log u)$$

e quindi possiamo scegliere come dominio $D = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$. In questo modo non abbiamo la generatrice sul piano $y = 0$. La parametrizzazione è regolare per i risultati standard sulle superfici di rotazione, in quanto la curva α non incontra l'asse di rotazione.

2. Calcoliamo: le derivate parziali sono:

$$\mathbf{x}_u = \left(\cos v,\, \sin v,\, \frac{1}{u}\right), \qquad \mathbf{x}_v = (-u \sin v,\, u \cos v,\, 0)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-\cos v,\, -\sin v,\, u)$$

Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale. La prima forma è data da:

- $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + \dfrac{1}{u^2} = \dfrac{u^2 + 1}{u^2}$
- $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$
- $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = u^2$

e si ha

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 = 1 + u^2$$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = \left(0, 0, -\frac{1}{u^2}\right) \qquad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin v,\, \cos v,\, 0) \qquad \mathbf{x}_{vv} = (-u\cos v,\, -u\sin v,\, 0)$$

Il vettore normale è:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(-\cos v,\, -\sin v,\, u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(-\cos v,\, -\sin v,\, u)\end{aligned}$$

e quindi la seconda forma è data da

- $e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -\dfrac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$
- $f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$
- $g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\left(-\dfrac{1}{1+u^2}\right)}{1+u^2} = \boxed{-\frac{1}{(1+u^2)^2}}$$

Curvatura media:

$$\begin{aligned}H = \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} &= \frac{1}{2}\frac{\dfrac{1+u^2}{u\sqrt{1+u^2}} - \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{1+u^2-u^2}{u\sqrt{1+u^2}}\right)}{1+u^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\frac{1}{u\,(1+u^2)^{3/2}}}\end{aligned}$$

3. La curva $\gamma(t)$ passa per il punto P per $t = 1$. Il vettore tangente è

$$\gamma'(1) = u'(1)\mathbf{x}_u(P) + v'(1)\mathbf{x}_v(P) = 1 \cdot \mathbf{x}_u(P) - 2 \cdot \mathbf{x}_v(P)$$

Si ha $\mathbf{x}_u(P) = (1,0,1)$ e $\mathbf{x}_v(P) = (0,1,0)$ e quindi $\gamma'(1) = (1,-2,1)$ e la sua norma è $\sqrt{6}$. Il versore è perciò $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\gamma'(1)$. La seconda forma, nel punto P, ha matrice

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e il vettore $\mathbf{u}$ ha coordinate $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$ nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Si ha perciò

$$k_n(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}) = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Esercizio 4. (10 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione differenziabile definita da

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

e siano

$$\alpha = z\, dx - x\, dy, \qquad \beta = 2y\, dx \wedge dz$$

due forme differenziali su $\mathbb{R}^3$.

1. calcolare $d\alpha$ e $d\beta$;
2. calcolare $f^*(\alpha)$ e $f^*(\beta)$;
3. calcolare $\alpha \wedge \beta$
4. determinare, se esiste, una forma η tale che $d\eta = \alpha \wedge \beta$.

Soluzione.

1. $$d\alpha = -dx \wedge dz - dx \wedge dy, \qquad d\beta = -2dx \wedge dy \wedge dz$$

2. Calcoliamo i pullback dei differenziali

   $$dx = \cos v\, du - u \sin v\, dv, \qquad dy = \sin v\, du + u \cos v\, dv, \qquad dz = dv$$

   e quindi

   $$\begin{aligned} f^*(\alpha) &= v(\cos v\, du - u \sin v\, dv) - u \cos v(\sin v\, du + u \cos v\, dv) \\ &= (v \cos v - u \cos v \sin v)\, du - (uv \sin v + u^2 \cos^2 v)\, dv \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} f^*(\beta) &= 2u \sin v(\cos v\, du - u \sin v\, dv) \wedge dv \\ &= 2u \sin v \cos v\, du \wedge dv \end{aligned}$$

3. $$\alpha \wedge \beta = 2xy\, dx \wedge dy \wedge dz$$

4. $\alpha \wedge \beta$ è una 3-forma su $\mathbb{R}^3$ e quindi è chiusa. Per il lemma di Poincaré è anche esatta e dunque η esiste (non unica!).

   Una possibile forma è (integrando rispetto ad x)

   $$\eta_1 = x^2 y\, dy \wedge dz$$

   Altre risposte possibili sono (integrando rispetto a y oppure a z)

   $$\eta_2 = -xy^2\, dx \wedge dz, \qquad \eta_3 = 2xyz\, dx \wedge dy$$