Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 20 gennaio 2020

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (2e^t,\, e^{at},\, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana;
2. per ognuno dei valori trovati determinare il piano che contiene la curva;
3. posto $a = 2$, determinare la funzione $f(s) = \dfrac{\tau(s)}{k(s)}$.

Esercizio 2. (4 punti) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Supponiamo che

$$k(s) = \tau(s), \qquad \forall\, s \in I$$

Dimostrare che esiste un vettore costante non nullo $\mathbf{v}$ tale che

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{v}, \qquad \forall\, s \in I$$

Dimostrare inoltre che $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{v}$ è costante.

Esercizio 3. (10 punti) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \log(uv)), \qquad (u, v) \in D$$

dove $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0\}$.

1. dimostrare che la parametrizzazione è regolare
2. determinare la curvatura Gaussiana di S
3. calcolare la curvatura normale di S nel punto $p_0 = \mathbf{x}(1, 1)$ nella direzione del versore tangente alla curva $\gamma(t) = \mathbf{x}(1 + 2t, 1 - t)$.

Esercizio 4. (10 punti) In $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) definiamo la forma

$$\omega = x_3 x_4 \, dx_1 \wedge dx_2 + x_2 x_4 \, dx_1 \wedge dx_3 + x_2 x_3 \, dx_1 \wedge dx_4$$

e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione

$$f(u, v, t) = (uv, u^2, v^2, t^2)$$

1. calcolare $f^*(\omega)$ e $*f^*(\omega)$;
2. calcolare $d(f^*(\omega))$ e $f^*(\omega) \wedge *f^*(\omega)$;
3. calcolare $d\omega$ e $f^*(d\omega)$.