Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 1

Alberto Albano

1 Curve parametrizzate

Cominciamo con la definizione di *curva differenziabile parametrizzata*:

Definizione 1.1. Una *curva differenziabile parametrizzata* è una funzione $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, dove

- I è un intervallo in $\mathbb{R}$ (generalmente aperto, ma non necessariamente)
- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ e cioè le funzioni $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ hanno derivate di ogni ordine (e in oarticolare hanno tutte le derivate continue)

Osservazione. Considereremo solo parametrizzazioni differenziabili (di classe $\mathcal{C}^\infty$) e quindi sottointenderemo spesso l'aggettivo *differenziabile.* Vedremo negli esempi qualche caso di parametrizzazioni non differenziabili e in questi casi faremo attenzione all'ipotesi di differenziabilità.

Osservazione. La definizione dice che una curva parametrizzata è una *funzione*, quindi non un oggetto geometrico. L'immagine $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ è detta la *traccia* o il *sostegno* di α. Discuteremo in seguito la differenza fra la nozione di curva parametrizzata e del suo sostegno.

Nel seguito ci limiteremo alla teoria delle curve nello spazio, cioè $\mathbb{R}^3$. Sarà però chiaro che (quasi) tutto si può estendere a curve in $\mathbb{R}^n$. Un caso speciale, che considereremo, è $n = 2$ e cioè la teoria delle *curve piane.*

Definizione 1.2. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata e sia $t_0 \in I$. Il *vettore*

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

viene detto *vettore tangente* (o *vettore velocità*) della curva α in t_0.

La curva α si dice *regolare in* t_0 se $\alpha'(t_0) \neq 0$ e cioè se almeno una delle tre derivate è diversa da 0.

La curva α si dice *regolare* se $\alpha'(t) \neq 0\ \forall t \in I$

Osservazione. Notiamo l'importante differenza fra $\alpha(t)$ e $\alpha'(t)$ (e le derivate successive, che considereremo in seguito). Su $\mathbb{R}^3$ convivono **due** diverse strutture:

- $\mathbb{R}^3$ è uno *spazio vettoriale* euclideo, con base ortonormale canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (il prodotto scalare è quello standard)
- $\mathbb{R}^3$ è uno *spazio affine*, i cui elementi sono *punti*, con sistema di riferimento indotto dalla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ e origine in O.

Una curva è costituita da **punti** e cioè $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$(spazio affine) mentre i vettori tangenti sono ovviamente **vettori** e cioè $\alpha' : I \to \mathbb{R}^3$(spazio vettoriale).

In generale non ci sarà confusione fra le due strutture di $\mathbb{R}^3$ ma è bene tenere presente la distinzione. Per esempio, ha senso parlare della *traslazione di una curva* (operazione affine) come ha senso parlare della *direzione* del vettore tangente (concetto vettoriale).

2 Esempi

Prima di introdurre altri concetti, vediamo alcuni esempi.

Esempio 2.1. RETTE. Siano

- $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un **punto**
- $\mathbf{v} = (\ell, m, n) = \ell\,\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ un **vettore**

La curva

$$\alpha(t) = P_0 + t\mathbf{v} = (x_0 + \ell t, y_0 + mt, z_0 + nt), \qquad t \in \mathbb{R}$$

è la *retta passante per P_0 e parallela al vettore* $\mathbf{v}$.

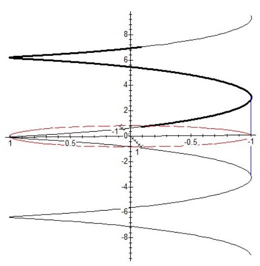
Naturalmente quello che abbiamo scritta è la *forma parametrica* della retta. Osserviamo che $\alpha'(t) = \mathbf{v}\ \forall t \in \mathbb{R}$ e cioè la velocità è costante. L'interpretazione fisica (cinematica) è il *moto rettilineo uniforme.*

Osserviamo che se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ e poniamo $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ allora la curva parametrizzata $\beta(t) = P_0 + t\mathbf{w}$ è diversa dalla curva α ma il sostegno è lo stesso. In particolare, $\beta'(t) = \mathbf{w} \neq \mathbf{v} = \alpha'(t)$ e cioè α e β percorrono entrambe la stessa retta, con moto rettilineo uniforme, ma a velocità diverse.

Osserviamo che anche la curva $\gamma(t) = P_0 + t^3\mathbf{v}$ ha sostegno la stessa retta, però questa volta non solo la velocità non è costante (il moto è rettilineo *accelerato*) ma $\gamma'(0) = \mathbf{0}$ e cioè γ non è regolare per $t = 0$.

Esempio 2.2. ELICHE CIRCOLARI. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$. La curva

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \qquad t \in \mathbb{R}$$



ha come traccia un'elica che giace sul cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Il *raggio* è a, il *passo* è $2\pi b$. Nel caso speciale $b = 0$ si ottiene una circonferenza, percorsa infinite volte. Il vettore tangente è

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

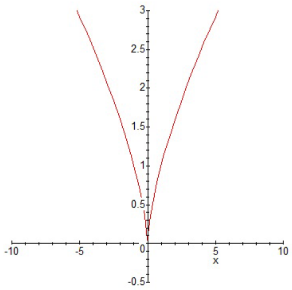
e quindi la velocità non è costante, però $\|\alpha'(t)\|^2 = a^2 + b^2$ è costante e cioè la *velocità scalare* (= modulo del vettore velocità) è costante.

Per finire, osserviamo che $\alpha'(t) \cdot \mathbf{k} = b$ e quindi

$$\cos \theta = \frac{\alpha'(t) \cdot \mathbf{k}}{\|\alpha'(t)\| \cdot \|\mathbf{k}\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

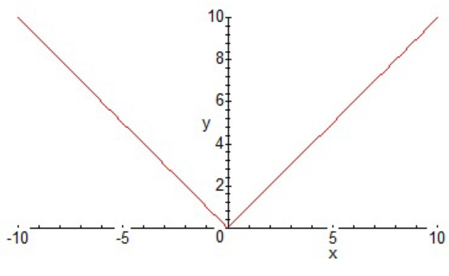
è costante: l'angolo θ formato da $\alpha'(t)$ con la retta asse del cilindro è costante.

Esempio 2.3. CUSPIDE. La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ è una curva piana, che non è regolare per $t = 0$ (verifica immediata).



La traccia è il grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x^2}$, che è derivabile solo per $x \neq 0$. Nonostante la curva α sia non regolare (presenta una *singolarità* nell'origine), la parametrizzazione è di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Esempio 2.4. VALORE ASSOLUTO. La curva $\alpha(t) = (t, |t|)$ non è una curva parametrizzata differenziabile, come ovvio.



Osserviamo però che la curva parametrizzata

$$\beta(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & t < 0 \end{cases}$$

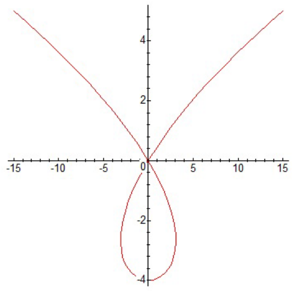
ha lo stesso sostegno ed è di classe $\mathcal{C}^1$ (ma non di classe $\mathcal{C}^2$). La curva β non è regolare nell'origine, naturalmente.

Esempio 2.5. Come per le rette, è possibile percorrere le circonferenze a velocità diversa, ottenendo quindi curve parametrizzate diverse con lo stesso sostegno. Per esempio, per le curve parametrizzate

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$
$$\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

si ha $\beta'(t) = 2\alpha'(2t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e cioè in punti corrispondenti la velocità di β è doppia di quella di α.

Esempio 2.6. NODO. La curva piana $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ è una curva parametrizzata differenziabile regolare in ogni punto. Infatti il vettore tangente $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$ è sempre non nullo: la seconda componente si annulla solo per $t = 0$ e per questo valore la prima componente è non nulla.



Osserviamo però che la funzione α non è iniettiva: $\alpha(-2) = \alpha(2) = (0, 0)$ e quindi il sostegno presenta una singolarità (un *nodo*) anche se la curva è regolare in tutti i punti.

Per ogni valore di t c'è un vettore tangente non nullo: in particolare $\alpha'(-2) = (8, -4)$ mentre $\alpha'(2) = (8, 4)$ e i due vettori (diversi fra loro) corrispondono ai vettori tangenti ai due rami della curva che passano per l'origine.

3 Parametrizzazione per arcolunghezza

Abbiamo visto che a volte lo stesso sostegno ammette parametrizzazioni diverse. Per studiare questo fenomeno, introduciamo una importante quantità.

D'ora in poi considereremo sempre curve differenziabili (di classe $\mathcal{C}^\infty$). Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata *regolare* e sia $t_0 \in I$.

Definizione 3.1. La funzione

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \, dt$$

è detta *arcolunghezza*.

Poiché $\alpha(t)$ è differenziabile, la funzione scalare $\|\alpha'(t)\|$ è continua (in effetti differenziabile) e quindi l'integrale esiste finito per ogni valore di t. Il numero reale $s(t)$ è la lunghezza dell'arco di curva fra i punti $P_0 = \alpha(t_0)$ e $P_t = \alpha(t)$.

Osservazione. L'arcolunghezza è già stata introdotta nel corso di ANALISI DUE, in cui si è studiata la relazione fra l'integrale scritto e la lunghezza delle curve.

Questo spiega anche la scelta dei nomi del parametro: t è il *tempo*, s è lo *spazio* e poiché $\alpha'(t)$ è la *velocità*, è ovvio che integrando la velocità rispetto al tempo si ottiene lo spazio. Questa interpretazione fisica, in realtà cinematica, è spesso utile.

Usiamo adesso l'ipotesi di regolarità: derivando rispetto a t si ha

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| \neq 0, \quad \forall t \in I$$

Quindi la derivata di $s(t)$ è sempre non nulla. Poiché

- il dominio di $s(t)$ è un intervallo (che è *connesso*),
- la derivata di $s(t)$ è una funzione *continua*, in quanto è il modulo di una funzione vettoriale continua,

si ha che l'immagine $J = s(I)$ è ancora un intervallo e la derivata $s'(t)$ mantiene sempre lo stesso segno e quindi $s(t)$ è strettamente crescente oppure strettamente decrescente. In ogni caso, la funzione

$$s : I \to J = s(I)$$

è una funzione biunivoca. Scrivendo $t = t(s)$ per indicare la funzione inversa, dalla formula per la derivata della funzione inversa si ha che

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt}$$

esiste sempre e cioè abbiamo

Proposizione 3.2. *La funzione $s(t)$ è invertibile e la sua inversa è ancora di classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Dimostrazione. Abbiamo appena dimostrato che la funzione inversa è derivabile. Derivando ulteriormente e applicando la formula per la derivata della funzoine inversa, otteniamo che la condizione affinché la funzione inversa ammetta derivata di ordine k è che la funzione di partenza abbia derivate di ordine k e la sua derivata *prima* non si annulli mai. $\square$

Consideriamo il seguente diagramma di mappe:

$$\begin{tikzcd}
I_t \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, bend right, "s(t)"'] & \mathbb{R}^3 \\
J_s \arrow[u, "t(s)"'] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

e cioè poniamo $\beta(s) = \alpha(t(s))$. Le curve α e β hanno lo sostegno e cioè sono due parametrizzazioni dello stesso insieme di punti. Calcoliamo la norma della derivata di β:

$$\|\beta'(s)\| = \left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right| = \|\alpha'(s)\| \cdot \frac{1}{\|\alpha'(s)\|} = 1$$

Si ottiene quindi che la velocità scalare di $\beta(s)$ è costantemente 1.

Nel diagramma precedente, le funzioni $s(t)$ e $t(s)$ non giocano alcun ruolo particolare, se non che sono funzioni inverse l'una dell'altra. Possiamo allora considerare la seguente situazione più generale.

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile e siano $\varphi : I \to J$ e $\psi : J \to I$ due funzioni, entrambe di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed inverse l'una dell'altra. Ponendo come prima

$$\beta(s) = \alpha(\psi(s))$$

si ha il diagramma

$$\begin{tikzcd} I_t \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] & \mathbb{R}^3 \\ J_s \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

In questa situazione si dice che α e β sono ottenute mediante *cambiamento di parametro* o *cambio di parametrizzazione*. Le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(s)$ sono i *cambiamenti di parametro*.

È chiaro che in tale caso le curve α e β hanno lo stesso sostegno, in quanto sono solamente percorse con "leggi del moto differenti". Quindi le proprietà *geometriche* di una curva dovrebbero essere indipendenti dai cambiamenti di parametro.

Questa osservazione è la chiave per dare la definizione di *curva*: consideriamo equivalenti fra loro tutte le curve parametrizzate che si ottengono l'una dall'altra mediante cambiamenti di paramento. Diamo alcune definizioni:

Definizione 3.3. Una funzione $\varphi : I \to J$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ fra intervalli della retta reale è un *diffeomorfismo* se è invertibile e l'inversa è ancora di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Definizione 3.4. Due curve parametrizzate $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ si dicono *equivalenti* se esiste $\varphi : I \to J$ *diffeomorfismo* tale che $\alpha = \beta \circ \varphi$, e cioè se α e β sono ottenute mediante cambiamento di parametro.

Esercizio 3.5. Dimostrare che quella appena definita è una relazione di equivalenza.

Possiamo finalmente dare la definizione di curva:

Definizione 3.6. Una *curva* è una classe di equivalenza di curve parametrizzate, rispetto alla relazione di equivalenza definita sopra.

Con questa definizione, possiamo che una proprietà è "geometrica" se non dipende dalla parametrizzazione scelta, ma solo dalla classe di equivalenza della curva. Un primo esempio è la lunghezza di un arco di curva.

Esempio 3.7. Siano α e β curve equivalenti, $\alpha = \beta \circ \varphi$, sia $t_0 \in I$ e poniamo $u_0 = \varphi(t_0)$. Allora, per ogni $t \in I$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{u_0}^{u=\varphi(t)} \|\beta'(u)\|\, du = s(u) = s(\varphi(t))$$

e cioè l'arcolunghezza è una proprietà geometrica, che non dipende dalla parametrizzazione scelta. Avete già visto in ANALISI DUE questa proprietà.

Concludiamo con una importante definizione.

Definizione 3.8. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile *regolare*. Allora $s : I \to J$ è un cambiamento di parametro (è differenziabile con inversa ancora differenziabile). La parametrizzazione $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ data da $\beta(s) = \alpha(t(s))$ è detta *parametrizzazione per arcolunghezza* e la sua proprietà caratteristica è:

$$\|\beta'(s)\| = 1, \qquad \forall s \in J$$

Riprendendo l'interpretazione cinematica data prima, possiamo pensare le parametrizzazioni $\alpha(t)$ e $\beta(s)$ come due *leggi del moto* diverse che descrivono la stessa traiettoria. In entrambi i casi il modulo del vettore tangente esprime la velocità scalare.

Nel caso di $\alpha(t)$, la variabile indipendente è il *tempo* t e la velocità significa la derivata dello spazio rispetto al tempo ed è quindi di solito variabile.

Nel caso di $\beta(s)$ la variabile indipendente è lo *spazio* s e quindi *deriviamo lo spazio rispetto allo spazio*. Ovviamente il risultato è la funzione costante 1.

In sostanza, la parametrizzazione per arcolunghezza descrive una curva usando come parametro lo spazio percorso a partire da un punto iniziale e non il tempo impiegato per percorrere tale spazio. La proprietà di avere vettore tangente di modulo costante pari a 1 semplifica molto lo studio delle proprietà della curva. Poiché tutte le curve regolari possono essere parametrizzate per arcolunghezza, questa non è una ipotesi restrittiva.

Vedremo però che spesso è difficile (quasi sempre impossibile) determinare esplicitamente la parametrizzazione per arcolunghezza di una curva data. Il nostro studio sarà quindi diviso in due parti: introdurremo i concetti importanti con l'ipotesi aggiuntiva che la curva sia parametrizzata per arcolugnhezza e poi cercheremo di trovare formule che calcolino queste quantità direttamente da parametrizzazioni arbitrarie senza prima trovare l'arcolunghezza.

4 La curvatura

La proprietà caratteristica di una retta è qualla di avere direzione costante. Dunque potremmo cercare di misurare il cambiamento di direzione di una curva per avere una quantità che descriva di quanto la curva si allontani dall'essere un retta.

Sia dunque $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per arcolunghezza. In questo caso, per chiarezza, useremo sempre la lettera s per indicare il parametro.

Si ha $\alpha'(s) =$ vettore tangente diverso da 0 e quindi per un punto $P_0 = alpha(s_0)$ otteniamo la *retta tangente* definita dall'equazione parametrica $P_0 + t\alpha'(s_0)$ e cioè la retta passante per il punto P_0 e parallela al vettore tangente nel punto.

Osserviamo che la retta tangente non dipende dalla parametrizzazione: se $\beta = \alpha \circ \varphi$ è un'altra parametrizzazione, ponendo $s = \varphi(u)$ e derivando si ha:

$$\beta'(u) = \alpha'(s) \cdot \varphi'(u)$$

e cioè i vettori tangenti $\beta'(u)$ e $\alpha'(s)$ sono paralleli (entrambi non nulli, in quanto $\varphi'(u) \neq 0$ perché φ è un diffeomorfismo). Dunque la retta tangente è un concetto geometrico, mentre il vettore tangente dipende dalla parametrizzazione.

Poiché α è parametrizzata per arcolunghezza, il vettore $\alpha'(s)$ ha modulo costante e dunque la sua derivata misura il cambiamento di direzione della retta tangente.

Definizione 4.1. Sia $\alpha(s)$ una curva regolare parametrizzata per arcolunghezza. La *curvatura* di α è la funzione

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Concludiamo questa lezione con due semplici esempi:

Esempio 4.2. Una curva è una retta se e solo se la curvatura è costantemente nulla. Infatti, sia $\alpha(s) = P_0 + s\mathbf{v}$ una retta (la parametrizzazione è per arcolunghezza quando $\|\mathbf{v}\| = 1$). Derivando due volte $\alpha'(s)$ si ottiene ovviamente $k(s) \equiv 0$.

Viceversa, se $\alpha''(s) \equiv 0$, dal teorema di Lagrange si ha $\alpha'(s) = \mathbf{v}$ (un vettore costante) e integrando ancora si ha $\alpha(s) = P_0 + s\mathbf{v}$ e cioè l'equazione di una retta.

Esempio 4.3. Sia $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ la circonferenza di centro l'origine e raggio r. Calcolando la derivata si ha

$$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

e quindi $\|\alpha'(t)\| \equiv r$. In questo caso è facile calcolare l'arcolunghezza e si ha $s(t) = rt$ e dunque l'inversa è $t(s) = s/r$.

Dunque possiamo riparametrizzare la circonferenza er arcolunghezza ottenendo

$$\beta(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

Derivando si ha

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right) \qquad \text{(notiamo che la norma è costantemente 1)} \\ \beta''(s) &= \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right) \end{aligned}$$

e dunque $k(s) = 1/r$. La circonferenza ha curvatura costante, pari all'inverso del raggio.

5 Esercizi

Esercizio 5.1. Consideriamo la curva γ dell'Esempio 2.1

$$\gamma(t) = P_0 + t^3\mathbf{v}$$

1. Descrivere a parole la velocità di γ.
2. Il vettore velocità ha sempre lo stesso verso? (la domanda ha senso perché il vettore velocità di γ ha direzione costante, parallela alla retta sostegno di γ).
3. Spiegare perché una curva con la velocità come sopra *deve* essere non regolare in almeno un punto.

Esercizio 5.2. Consideriamo le curve degli Esempi 2.3 e 2.4.

1. Per la curva “valore assoluto” trovare una parametrizzazione di classe $\mathcal{C}^k$, per ogni $k \geq 0$. (Osservate che tutte le parametrizzazioni trovate non sono regolari nell’origine).
2. È possibile trovare una parametrizzazione del valore assoluto di classe $\mathcal{C}^\infty$?
3. Spiegare la differenza fra la cuspide e il valore assoluto, e cioè perché un sostegno ammette parametrizzazioni $\mathcal{C}^\infty$ mentre l’altro no.

Esercizio 5.3. Se non avete visto nel corso di Analisi il ragionamento fatto nella dimostrazione della Proposizione 3.2, calcolate la derivata seconda di $t(s)$ e cercate di esprimerla in temini di derivate (prime e seconde) di $s(t)$. Otterrete una frazione il cui denominatore dipende solo dalla derivata prima e che si annulla solo se la derivata prima si annulla.

Calcolate allo stesso modo la derivata terza e cercate una dimostrazione per induzione che valga per le derivate di ogni ordine.

Esercizio 5.4. Calcolare la curvatura dell’elica dell’Esempio 2.2. Osservate che la parametrizzazione data non è per arcolunghezza e quindi, come nel caso della circonferenza, occorre per prima cosa trovare l’arcolunghezza. Anche questo caso è facile (i casi facili sono finiti ...).