1 Definizione di punto singolare

La domanda è:

Domanda. Cosa intendiamo con il concetto di punto singolare di una curva parametrizzata: inizialmente avevo inteso che si trattasse di un punto in cui il vettore velocità si annulla, ossia un punto in cui la curva non è regolare, ma l'esempio 2.6 (della Lezione 1, il nodo) mi ha fatto cambiare idea. Si dice dunque singolare un punto che presenti caratteristiche diverse rispetto alla quasi totalità dei punti della curva? Ho cercato informazioni su varie fonti, ma non ho trovato una risposta univoca.

L'incomprensione è dovuta al fatto che abbiamo definito cosa è un punto regolare e non cosa è un punto singolare. La (naturale) deduzione è che singolare significa *non regolare*. Questo è vero, però è il concetto di regolare che va precisato meglio.

La Definizione 1.2 parla di curve *parametrizzate*: $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione fissata e diamo la definizione di cosa vuol dire *regolare in* t_0, dove $t_0 \in I$: vuol dire che il vettore $\alpha'(t_0) \neq 0$.

Con questa definizione, la cuspide e il valore assoluto sono singolari nell'origine, e non credo ci siano dubbi sul significato di questa affermazione.

La domanda chiede

> Si dice dunque singolare un punto che presenti caratteristiche diverse rispetto alla quasi totalità dei punti della curva?

Non è esattamente così. Inoltre l'espressione "la quasi totalità" non ha un significato chiaro. Potrebbe voler dire "tutti i punti tranne un numero finito" oppure "tranne dei punti isolati". Pensi per esempio a togliere i numeri interi dai reali: sono rimasti la quasi totalità? Perché? Perché abbiamo tolto solo una infinità numerabile? Ma allora se togliamo tutti i razionali dai reali, ne sono rimasti la quasi totalità? (qui ci sembrerebbe di no, la forma di quello che resta non sembra una curva).

Però l'intuizione è corretta: singolare dovrebbe voler dire "diverso" (probabilmente "peggiore") degli altri.

Un altro aspetto, che non è affrontato nella lezione e che vedremo meglio quando parleremo di superfici, è dato dal fatto che la definizione di regolare è data è tramite la parametrizzazione ma a noi interessano gli oggetti geometrici e cioè il sostegno.

Dopo queste premesse, scriviamo la definizione completa di punto regolare del sostegno: se $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è una curva parametrizzata, poniamo $C = \alpha(I)$ il suo sostegno. L'insieme C è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e quindi ha una topologia indotta. Perché un punto sia regolare anche la topologia deve essere quella "giusta".

Definizione 1.1. Un punto $P \in C$ è un punto regolare se ha un intorno (nella topologia indotta da $\mathbb{R}^3$ su C) *diffeomorfo* ad un intervallo della retta reale.

In questa definizione la parametrizzazione non gioca alcuun ruolo e con questa definizione un nodo è certamente non regolare

La situazione è simile a quella delle superfici topologiche: ogni punto ha un intorno *omeomorfo* a uno spazio standard. Per le superfici (dimensione 2) lo spazio standard è un disco del piano, per le curve (dimensione 1) lo spazio standard è un intervallo sulla retta.

Notiamo però la differenza: perché il punto sia regolare ci vuole un *diffeomorfismo* e cioè non solo continuo con inversa continua ma differenziabile con inversa differenziabile.

Osserviamo che cuspide e valore assoluto sono "varietà topologiche di dimensione 1", però non sono "varietà differenziabili", perché gli omeomorfismi non possono essere differenziabili.

Invece il nodo non è nemmeno una "varietà topologica": un intorno del nodo è l'unione di due intervalli che si incontrano in un punto e questo spazio non è omeomorfo ad un intervallo (se tolgo il punto di incontro, ci sono 4 componenti connesse, mentre se tolgo un punto ad un intervallo ci sono 2 componenti connesse).

Dunque: punto singolare significa che nessun intorno è diffeomorfo a un intervallo e questo può capitare in due modi diversi (che questi siano i soli due modi è un teorema, la cui dimostrazione non è banale):

- NODO: vicino al punto non è nemmeno una varietà (tipicamente questo capita perché la parametrizzaione non è iniettiva)
- CUSPIDE: la curva è una varietà topologica ma non differenziabile