1 Parametrizzazione $\mathcal{C}^\infty$ del valore assoluto

Per prima cosa riportiamo il testo completo dell'Esercizio 1.10, pag. 36 dell'Abate-Tovena

Esercizio. Per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ trova una curva parametrizzata $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe $\mathcal{C}^k$ il cui sostegno sia il grafico della funzione valore assoluto. Dimostra inoltre che nessuna di tali curve può essere regolare.

Le parametrizzazioni del tipo

$$\beta(t) = \begin{cases} (t^k, t^k) & t \geq 0 \\ ((-1)^{k+1}\, t^k, (-1)^k\, t^k) & t < 0 \end{cases}$$

hanno come sostegno il valore assoluto e sono di classe $\mathcal{C}^{k-1}$, e quindi abbiamo il risultato per $k \in \mathbb{N}$.

Il problema è dunque trovare una parametrizzazione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Consideriamo la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

È un fatto ben noto che questa funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$. L'unico punto da studiare è evidentemente $t = 0$ e ovviamente tutte le derivate *sinistre* sono nulle. Dobbiamo quindi dimostrare che anche tutte le derivate *destre* sono nulle.

Non riportiamo qui la dimostrazione, perché questa funzione è anche usata in uno degli esercizi da fare per martedì prossimo e troverete il calcolo completo nella discussione di quegli esercizi. Nel frattempo siete invitati a calcolare le derivate destre.

Consideriamo solo $t \geq 0$. La funzione è strettamente crescente e l'immagine è l'intervallo $[0, 1)$. Poiché vogliamo parametrizzare tutta la semiretta destra del valore assoluto, consideriamo

$$g(t) = tf(t), \qquad t \geq 0$$

Verifichiamo che le derivate destre di $g(t)$ sono ancora tutte nulle.

Esercizio 1.1. Dimostrare per induzione che

$$g^{(n)}(t) = nf^{(n-1)}(t) + tf^{(n)}(t)$$

e quindi abbiamo la tesi.

Definiamo adesso la parametrizzazione

$$\beta(t) = \begin{cases} (g(t), g(t)) & t \geq 0 \\ (-g(-t), g(-t)) & t < 0 \end{cases}$$

Il segno negativo davanti all'argomento è necessario perché la funzione $g(t)$ è definita solo per $t \geq 0$ e dobbiamo estenderla anche a valori di t negativi per avere la parte sinistra del valore assoluto. Questa parametrizzazione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché in $t = 0$ le derivate destre e sinistre sono sempre nulle e quindi la funzione ha derivate di ogni ordine.

Intuitivamente, partite da $t = -\infty$ con velocità molto elevata sul ramo sinistro del valore assoluto e poi rallentate fino ad avere velocità nulla per $t = 0$. A questo punto cambiate direzione (il vettore nullo non ha direzione e quindi potete pensare che la direzione sia arbitraria) e poi ripartite sul ramo destro del valore assoluto a velocità sempre crescente, verso $+\infty$ (e oltre...).

Il rallentamento di questa funzione è lentissimo (così come la successiva accelerazione) ed è tale che non solo la velocità (= derivata prima) tende a 0 ma anche l'accelerazione (= derivata seconda), e anche tutte le derivate di ordine superiore in modo da risultare infinitamente differenziabile.

Osservazione. Un commento sull'importanza della funzione $f(t)$: è la funzione costante per $t < 0$ e poi da $t = 0$ in poi non è più costante. Inoltre tutte le derivate in $t = 0$ sono nulle. Allora, se scrivete la serie di Taylor in $t = 0$ ottenete una serie *convergente* (ovvio, tutti i coefficienti sono nulli) però la serie converge alla funzione costantemente nulla e non alla funzione f.

Questo è un esempio di *funzione* $\mathcal{C}^\infty$ (ha infinite derivate) ma *non analitica* (non è rappresentabile in serie di potenze).

È ovvio che una funzione analitica, cioè che si scrive come una serie di potenze, è infinitamente derivabile. Questo esempio dimostra che le due classi di funzioni non coincidono.