Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 2

Alberto Albano

In questa seconda lezione affrontiamo lo studio delle curve nello spazio. Vedremo come ogni curva può essere caratterizzata da due funzioni scalari dal significato geometrico, dette *curvatura* e *torsione*. Il teorema principale della teoria afferma che due curve si possono ottenere l'una dall'altra mediante rotazioni e traslazioni se e solo se hanno curvatura e torsione uguale. Vedremo in questa lezione l'enunciato preciso (Teorema 2.2) e vedremo la dimostrazione nella prossima lezione.

Lo studio si svolgerà in due parti: definiremo curvatura e torsione in modo esplicito per curve parametrizzate per arcolunghezza e troveremo in questo modo le loro principali proprietà. Poi nell'ultimo paragrafo ricaveremo delle formule che ci consentono di calcolare tutte le quantità introdotte in precedenza per curve arbitrarie, rendendo in questo modo effettivo il nostro studio.

1 Curvatura e torsione

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata per arcolunghezza. Sappiamo quindi che $\|\alpha'(s)\| \equiv 1$. Abbiamo definito la curvatura come

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|$$

ma dobbiamo verificare che sia una proprietà geometrica e cioè che non dipenda dalla parametrizzazione ma solo dalla classe di equivalenza della curva. In sostanza, dobbiamo far vedere che se α e β sono ottenute l'una dall'altra mediante cambio di parametro, le loro curvature sono uguali.

Sappiamo che in ogni classe di equivalenza esiste almeno un rappresentante parametrizzato per arcolunghezza. Questo rappresentante però non è unico. Per esempio, abbiamo usato un particolare estremo inferiore di integrazione nella formula che esprime $s(t)$. Cambiando questo estremo la parametrizzazione cambia ma è sempre per arcolunghezza, in quanto stiamo semplicemente fissando una diversa "origine" nel sistema di riferimento. È facile vedere che la curvatura in questo caso non cambia, ma ci potrebbero essere altre situazioni diverse e dobbiamo considerarle tutte.

Supponiamo allora di avere due parametrizzazioni α e β equivalenti, e quindi un diagramma del tipo

$$\begin{tikzcd} I_s \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R}^3 \\ J_\sigma \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

dove $\sigma = \varphi(s)$ è un diffeomorfismo e $\alpha(s) = \beta(\varphi(s)) = \beta(\sigma)$. Se le parametrizzazioni $\alpha(s)$ e $\beta(\sigma)$ sono entrambe per arcolunghezza, si ottiene

$$1 \equiv \left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\beta}{d\sigma} \right\| \cdot |\varphi'(s)|$$

e poiché anche $\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| \equiv 1$ si ha $|\varphi'(s)| \equiv 1$ e quindi

$$\varphi'(s) = \pm 1, \qquad \forall s \in I$$

La funzione $\varphi(s)$ è un diffeomorfismo e quindi $\varphi'(s)$ è continua e poiché assume valori discreti e il dominio è un intervallo, deve essere costante. Possiamo dunque integrare e ottenere σ in funzione di s:

$$\sigma = \varphi(s) = \pm s + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

La scelta della costante di integrazione c riflette la scelta del punto "origine" e cioè dell'estremo inferiore di integrazione, fatto che avevamo già osservato. Il segno invece descrive il *verso di percorrenza*: quando $\varphi'(s) \equiv -1$ si ha $\sigma = -s+c$ e cioè le parametrizzazioni α e β percorrono la curva in versi opposti.

Diamo un nome a questa situazione:

Definizione 1.1. Se $\alpha(t)$ e $\beta(\tau)$ sono curve parametrizzate equivalenti, date mediante il cambio di parametro $\tau = \varphi(t)$ e $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$ si dice che

- α e β hanno la *stessa orientazione* se $\varphi'(t) > 0$, $\forall t \in I$
- α e β hanno *orientazione opposta* se $\varphi'(t) < 0$, $\forall t \in I$

Notiamo che in questa definizione i parametri t e τ non sono necessariamente lunghezze d'arco.

Torniamo al caso da cui eravamo partiti: α e β sono entrambe parametrizzate per arcolunghezza e abbiamo la relazione $\sigma = \pm s + c$. In particolare $\varphi(s) \equiv \pm 1$ è una funzione costante. Dall'uguaglianza $\alpha(s) = \beta(\varphi(s))$ si ottiene, derivando rispetto ad s:

- $$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \varphi'(s)$$
- $$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \varphi'(s) \right) \\ &= \frac{d^2\beta}{d\sigma^2} \cdot \varphi'(s) \cdot \varphi'(s) + \frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \varphi''(s) \\ &= \frac{d^2\beta}{d\sigma^2} \cdot (\varphi'(s))^2 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato la

Proposizione 1.2. *Siano* $\alpha(s)$ *e* $\beta(\sigma)$ *due curve regolari equivalenti, entrambe parametrizzate per arcolunghezza. Allora:*

- α *e* β *hanno la* stessa orientazione $\Longrightarrow$ $\alpha'(s) = \beta'(\sigma)$ *e* $\alpha''(s) = \beta''(\sigma)$
- α *e* β *hanno* orientazione opposta $\Longrightarrow$ $\alpha'(s) = -\beta'(\sigma)$ *e* $\alpha''(s) = \beta''(\sigma)$

Da questa proposizione otteniamo che $\alpha''(s)$ e $k(s)$ sono invarianti per cambiamento di parametro e sono dunque *proprietà geometriche* della curva, mentre il vettore tangente $\alpha'(s)$ cambia il verso quando le parametrizzazioni hanno orientazione opposta e quindi non è una proprietà geometrica.

Per definizione la curvatura è la norma del vettore derivata seconda. Quando la norma è diversa da 0 è possibile definire un versore, dividendo per la norma.

Definizione 1.3. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare. La curva si dice *biregolare* se $k(s) > 0$ per ogni $s \in I$.

Poiché la curvatura $k(s)$ è una norma, la condizione di biregolarità significa semplicemente che il vettore $\alpha''(s)$ non è mai il vettore nullo. D'ora in poi tutte le curve che considereremo saranno parametrizzate per arcolunghezza e biregolari.

Osservazione. Un caso particolare è quello delle rette. La curvatura di una retta è identicamente nulla e quindi una retta non è biregolare. Questo non è un problema grave, in quanto conosciamo le proprietà delle rette senza dover usare gli strumenti del calcolo differenziale.

Definizione 1.4. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$. Il *vettore tangente* è il versore

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$$

Definizione 1.5. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$. Il *vettore normale* è il versore

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)}\alpha''(s)$$

Notiamo che $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono funzioni vettoriali, di dominio I e codominio lo *spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$. Possiamo anche pensare a queste funzioni come l'assegnare ad ogni punto della curva un vettore applicato al punto della curva. Funzioni di questo tipo si chiamano di solito *campi vettoriali* (ricordate la definizione vista in ANALISI DUE). Però i campi tangente e normale non sono definiti su un aperto di $\mathbb{R}^3$ ma solo nei punti della curva o meglio, per i valori del parametro $s \in I$.

Poiché questi campi sono funzioni (vettoriali) di *una* variabile, ammettono derivate ordinarie e non derivate parziali. Osserviamo anche che i campi vettoriali $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$, poiché sono ottenuti da funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$. Anche la funzione $k(s)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ poiché la norma (che contiene una radice quadrata) è $\mathcal{C}^\infty$ in tutti i punti in cui l'argomento è diverso da 0 e quindi sempre, per ipotesi di biregolarità.

Il nome *vettore tangente* è chiaro. Spieghiamo adesso il significato del nome *vettore normale*. Il seguente lemma è molto utile e verrà usato molte volte nel seguito.

Lemma 1.6. *Sia* $\mathbf{v} : I \to \mathbb{R}^3$ *una funzione vettoriale di* norma *costante. Allora i vettori* $\mathbf{v}(t)$ *e* $\mathbf{v}'(t)$ *sono ortogonali, per ogni* $t \in I$.

Dimostrazione. Per ipotesi, il prodotto scalare $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \equiv c$ è costante, perché è il quadrato della norma. Derivando con la regola di Leibniz e usando la simmetria del prodotto scalare si ha

$$2\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \equiv 0$$

e cioè $\mathbf{v}(t) \perp \mathbf{v}'(t)$ per ogni $t \in I$. □

Per il lemma, poiché $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ ha norma costante, i vettori $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$ sono ortogonali per ogni $s \in I$. Questo spiega il nome di *vettore normale* (= ortogonale).

Osservazione. Poiché siamo nello spazio, c'è un *piano* di vettori ortogonali a $\mathbf{t}(s)$. Il vettore normale $\mathbf{n}(s)$ appartiene a questo piano ed è caratterizzato, fra tutte le infinite possibilità, dall'essere nella direzione e nel verso della derivata del vettore $\mathbf{t}(s)$. È quindi un vettore speciale e non basta dire che è perpendicolare al vettore tangente per individuarlo.

Osservazione. Naturalmente, anche se una retta non è biregolare, il campo tangente è ben definito (ed è costante). Invece il campo normale non è definito, proprio perché non c'è modo di selezionare un vettore particolare nel piano perpendicolare alla retta.

I due vettori $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono due versori ortogonali. È quindi naturale completare ad una terna di versori ortogonali, in modo da avere una base ortonormale dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Il modo più semplice per definire il terzo vettore è:

Definizione 1.7. Il vettore

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

si dice *vettore binormale.*

Il vettore $\mathbf{b}(s)$ è, per definizione di prodotto vettoriale, ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$. La sua norma si calcola, per ogni s, con la formula:

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{t}\| \cdot \|\mathbf{n}\| \cdot \sin\theta$$

dove θ è l'angolo fra $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$. Poiché sono entrambi versori e sono ortogonali ($\theta = \pi/2$), la norma del prodotto vettoriale è 1.

Introduciamo un po' di terminologia.

Definizione 1.8. La base ortonormale $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ viene detta *triedro di Frenet.*

Questa base non è costante, ma varia da punto a punto. Ha interesse considerare i piani coordinati rispetto a questa base.

Definizione 1.9. Il piano generato da $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ è detto *piano osculatore.*

Il piano osculatore in un punto $P_0 = \alpha(s_0)$ è quindi il piano passante per P_0 e perpendicolare a $\mathbf{b}(s_0)$.

Una curva si dice *piana* se è contenuta in un piano (che non è necessariamente il piano $z = 0$.) Le curve piane hanno piano osculatore costante e in effetti giacciono in questo piano.

Lemma 1.10. *Sia* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva biregolare piana. Allora il piano osculatore è costante e coincide con il piano che contiene la curva. Inoltre anche il vettore binormale* $\mathbf{b}(s)$ *è costante.*

Dimostrazione. Sia $P_0 = \alpha(s_0)$ un punto della curva e supponiamo che il piano che contiene la curva sia il piano passante per P_0 e perpendicolare al vettore (costante) $\mathbf{v}$. La sua equazione è dunque

$$(\mathbf{x} - P_0) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Poiché i punti della curva soddisfano l'equazione del piano si ha

$$(\alpha(s) - P_0) \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \forall s \in I$$

e derivando (due volte) con la regola di Leibniz e ricordando che $\mathbf{v}$ è costante, si ha:

$$\begin{aligned} \alpha'(s) \cdot \mathbf{v} &\equiv 0, \qquad \forall s \in I \\ \alpha''(s) \cdot \mathbf{v} &\equiv 0, \qquad \forall s \in I \end{aligned}$$

e quindi i vettori $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono sempre perpendicolari al vettore costante $\mathbf{v}$. Allora il piano che generano, e cioè il piano osculatore, coincide per ogni $s \in I$ con il piano che contiene la curva ed è dunque costante.

Di conseguenza anche il vettore $\mathbf{b}(s)$ è costante. □

Osservazione. Le rette sono ovviamente curve piane, ma non sono biregolari e quindi il Lemma precedente non si applica. Una retta non ha vettore normale e binormale e quindi non ha piano osculatore. D'altra parte, una retta è contenuta in infiniti piani (tutti i piani del fascio di centro la retta) e quindi non identifica un piano particolare.

Abbiamo già visto che curvatura costante nulla implica che la curva è una retta. Vediamo adesso che le curve piane hanno vettore binormale costante. Dunque la variazione del vettore binormale dovrebbe esprimere di quanto una curva si discosta dal giacere in un piano e quindi essere veramente una curva "dello spazio".

Per studiare questa variazione, calcoliamo la derivata di $\mathbf{b}(s)$ a partire dalla sua definizione come prodotto vettoriale, ricordando che la regola di Leibniz vale anche per il prodotto vettoriale.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(s) &= (\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)) \\ &= \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) \\ &= k(s) \underbrace{\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{n}(s)}_{=0} + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) \end{aligned}$$

Questo calcolo mostra che $\mathbf{b}'(s)$ è ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ (anche a $\mathbf{n}'(s)$ ma questa informazione non serve).

Poiché il campo binormale ha norma costante (sono tutti versori), dal Lemma 1.6 si ottiene che $\mathbf{b}'(s)$ è anche ortogonale a $\mathbf{b}(s)$. Essendo ortogonale a due dei versori di una terna ortonormale, deve perciò essere parallelo al terzo: $\mathbf{b}'(s)$ è parallelo a $\mathbf{n}(s)$ e possiamo scrivere

$$\boxed{\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)}$$

dove la funzione $\tau(s)$ (di classe $\mathcal{C}^\infty$) esprime il coefficiente di proporzionalità fra i vettori $\mathbf{b}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$.

Definizione 1.11. La funzione $\tau(s) = -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ è detta *torsione.*

ATTENZIONE. Su (quasi) tutti i libri sulla teoria delle curve, la definizione di torsione è quella data qui sopra. Solo sul do Carmo, che però è proprio il testo che seguiamo maggiormente, la torsione è definita con il segno opposto.

Questo non porta nessuna conseguenza se non che leggendo gli esercizi e le soluzioni del do Carmo, dobbiamo ricordarci di cambiare il segno tutte le volte che compare la torsione.

Concludiamo questo paragrafo con una caratterizzazione delle curve piane.

Proposizione 1.12. *Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Allora $\alpha(s)$ è una curva* piana *se e solo se $\tau(s) \equiv 0$ per ogni $s \in I$*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.10 sappiamo che se la curva è piana allora il vettore binormale è costante. Dunque la derivata $\mathbf{b}'(s) = 0$ per ogni $s \in I$ e per definizione, la torsione è identicamente nulla.

Viceversa, se la torsione è identicamente nulla, allora il campo binormale $\mathbf{b}(s)$ è costante e poniamo $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$. Sia inoltre $P_0 = \alpha(s_0)$ un punto della curva e consideriamo la funzione di dominio I

$$g(s) = (\alpha(s) - P_0) \cdot \mathbf{b}$$

Derivando, si ottiene $g'(s) = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b} \equiv 0$ (perché i vettori tangente e binormale sono sempre ortogonali) e dunque la funzione $g(s)$ è *costante* (la sua derivata è identicamente nulla e il dominio è un intervallo). Calcolando nel punto s_0 si ha

$$g(s_0) = (\alpha(s_0) - P_0) \cdot \mathbf{b} = (\alpha(s_0) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{b} = 0$$

Allora la funzione $g(s)$ è *identicamente nulla* (è costante e vale 0 in un punto) e cioè $\alpha(s)$ è contenuta nel piano di equazione

$$(\mathbf{x} - P_0) \cdot \mathbf{b} = 0$$

□

2 Le formule di Frenet

Sia come sempre $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Per ogni $s \in I$ i vettori $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ formano una base (ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ e perciò possiamo esprimere ogni vettore come loro combinazione lineare. Abbiamo già calcolato

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= k(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

Completiamo il lavoro calcolando la derivata del campo normale. Dalla definizione del campo binormale

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

e dalle proprietà del prodotto vettoriale otteniamo che

$$\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$$

Derivando (per semplicità non scriviamo la variabile s) e usando le formule precedenti, si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{n}' &= \mathbf{b}' \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}' \\ &= -\tau \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} + k \mathbf{b} \wedge \mathbf{n} \\ &= -k\mathbf{t} + \tau \mathbf{b}\end{aligned}$$

Queste tre formule sono note con il nome di *formule di Frenet*. Enunciamo in dettaglio quello che abbiamo ottenuto:

Teorema 2.1 (Formule di Frenet)**.** *Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza e siano $k(s)$ e $\tau(s)$ le funzioni curvatura e torsione. Allora le funzioni vettoriali $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ soddisfano il sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & & k(s)\,\mathbf{n}(s) & \\ \mathbf{n}'(s) = & -k(s)\,\mathbf{t}(s) & & + \tau(s)\,\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = & & -\tau(s)\,\mathbf{n}(s) & \end{cases}$$

Dal punto di vista scalare, si tratta di un sistema di 9 equazioni in 9 incognite (le componenti delle tre funzioni vettoriali).

L'importanza di queste formule è duplice: da una parte, se α è una curva data, le formule di Frenet sono vere ed esprimono relazioni fra i vettori del triedro di Frenet e le loro derivate. A partire da queste relazioni se ne possono ottenere altre e vedremo negli esercizi come usare le formule di Frenet per ottenere ulteriori proprietà di una curva a partire dalla curvatura e dalla torsione.

D'altra parte, queste formule contengono (come coefficienti) la curvatura e la torsione. Ci possiamo chiedere se ci sono altre funzioni che sono necessarie per descrivere una curva. La risposta è NO e l'enunciato preciso, che spiega l'importanza della curvatura e della torsione è il seguente teorema, noto come

Teorema 2.2 (Teorema fondamentale della teoria locale delle curve)**.** *Siano date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, con $f(s) > 0$ per ogni $s \in I$.*

Allora esiste una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ biregolare, parametrizzata per arcolunghezza, tale che $f(s)$ e $g(s)$ sono rispettivamente la sua curvatura e la sua torsione, cioè $k_\alpha(s) = f(s)$ e $\tau_\alpha(s) = g(s)$.

Inoltre, la curva α è unica a meno di movimenti rigidi dello spazio $\mathbb{R}^3$, cioè se β è un'altra curva con la stessa curvatura e la stessa torsione di α allora esiste un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ (composizione di rotazioni e traslazioni) che porta α su β.

Vedremo la dimostrazione di questo teorema ed alcune sue conseguenze nella prossima lezione.

3 Formule per parametro qualunque

Il Teorema Fondamentale dice che curvatura e torsione contengono tutte le informazioni geometriche relative ad una curva. La loro definizione è stata data mediante una parametrizzazione per arcolunghezza, cosa che è quasi sempre impossibile da determinare.

Si pone dunque il problema se sia possibile calcolare curvatura e torsione anche senza preliminarmente trovare una parametrizzazione per arcolunghezza. Questo è in effetti possibile e nel seguito ricaviamo queste formule.

Le formule si trovano enunciate nell'Esercizio 12, paragrafo 1.5 del do Carmo nelle pagine 25/26. Svolgiamo qui questo esercizio con tutti i dettagli. Lo svolgimento illustra anche l'uso delle formule di Frenet.

Sia dunque $\alpha : I_t \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, sia $s : I_t \to J_s$ l'arcolunghezza, $t : J_s \to I_t$ il diffeomorfismo inverso e sia $\alpha(t) = \beta(s(t))$, dove $\beta : J_s \to \mathbb{R}^3$ è la parametrizzazione per arcolunghezza. Stiamo cioè considerando il diagramma (già visto nella scorsa lezione)

$$\begin{tikzcd}
I_t \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, bend right, "s(t)"'] & \mathbb{R}^3 \\
J_s \arrow[u, "t(s)"'] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

La curvatura e la torsione si ottengono calcolando le derivate di $\beta(s)$ rispetto ad s. Vogliamo esprime queste quantità solo in termini di derivate di $\alpha(t)$ rispetto a t. Per maggior chiarezza, usiamo una convenzione tipica della Fisica (e risalente a Newton) e indichiamo con

$$\begin{aligned}
(\dot{\ }) &= \text{ derivata rispetto a } t \ (= \text{tempo}) \\
(\ )' &= \text{ derivata rispetto a } s \ (= \text{spazio})
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\beta'(s) = \beta' = \mathbf{t} \qquad \text{e} \qquad \dot{\alpha}(t) = \beta'(s)\dot{s}(t) = \dot{s}\,\mathbf{t}$$

passando ai moduli e ricordando che $\|\mathbf{t}\| = 1$ si ha

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\| = \text{ velocità scalare} \tag{1}$$

D'ora in poi non indichiamo le variabili da cui dipendono le funzioni, perché il differente simbolo per le derivate rende chiaro qual è la variabile indipendente. Mettiamo in evidenza le formule importanti:

$$\boxed{\dot{\alpha} = \dot{s}\,\mathbf{t}} \tag{2}$$

Derivando rispetto a t si ha:

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} &= \ddot{s}\,\mathbf{t} + \dot{s}(\dot{\mathbf{t}}) \\
&= \ddot{s}\,\mathbf{t} + \dot{s}(\mathbf{t}'\dot{s}) \\
&= \ddot{s}\,\mathbf{t} + (\dot{s})^2\,\mathbf{t}' \\
&= \ddot{s}\,\mathbf{t} + (\dot{s})^2 k\,\mathbf{n}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza viene dalla prima formula di Frenet. Dunque

$$\boxed{\ddot{\alpha} = \ddot{s}\,\mathbf{t} + (\dot{s})^2 k\,\mathbf{n}} \tag{3}$$

Da queste due equazioni si ottiene

$$\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} = (\dot{s})^3 k\,\mathbf{b} \tag{4}$$

e passando ai moduli

$$\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\| = (\dot{s})^3 k$$

e dunque, dividendo per $(\dot{s})^3 = \|\dot{\alpha}\|^3$ (ricordando l'uguaglianza (1)

$$\boxed{k = \frac{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3}} \tag{5}$$

In questa formula ci sono solo derivate rispetto a t e quindi possiamo calcolare la curvatura. Per ottenere la torsione deriviamo la formula (3)

$$\dddot{\alpha} = \dddot{s}\,\mathbf{t} + \ddot{s}\dot{s}\,\mathbf{t}' + 2\dot{s}\ddot{s}k\,\mathbf{n} + (\dot{s})^2(\dot{s}k')\mathbf{n} + (\dot{s})^2 k\dot{s}\,\mathbf{n}'$$

Scriviamo $\mathbf{t}'$ e $\mathbf{n}'$ in funzione di $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ usando le formule di Frenet e raccogliamo. Si ottiene (controllate i calcoli!!):

$$\begin{aligned}\dddot{\alpha} &= (\dddot{s} - (\dot{s})^3 k^2)\,\mathbf{t} \\ &\quad + (\ddot{s}\dot{s}k + 2\dot{s}\ddot{s}k + (\dot{s})^3 k')\,\mathbf{n} \\ &\quad + (\dot{s})^3 k\tau\,\mathbf{b}\end{aligned}$$

Adesso calcoliamo il prodotto scalare $(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}$. Dalla formula (4) sappiamo che il prodotto esterno è parallelo a $\mathbf{b}$ e quindi nel prodotto scalare sopravvive solo il coefficiente di $\mathbf{b}$ (la base è *ortonormale*):

$$(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha} = (\dot{s})^6 k^2 \tau$$

da cui possiamo ricavare la torsione:

$$\tau = \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{(\dot{s})^6 k^2} = \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|^6 \cdot \dfrac{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|^2}{\|\dot{\alpha}\|^6}}$$

e semplificando si ottiene finalmente

$$\boxed{\tau = \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|^2}} \tag{6}$$

Le formule (5) e (6) sono le formule cercate. Notiamo che è anche facile ottenere i vettori del triedro di Frenet:

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \frac{\dot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|} && \text{chiaro, stiamo normalizzando il vettore tangente} \\ \mathbf{b} &= \frac{\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|} && \text{la formula (4) dice che è parallelo a } \mathbf{b} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}\end{aligned}$$

Esercizio 3.1. Sia $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ l'elica circolare di raggio $a > 0$ e passo $2\pi b$. Calcolare curvatura, torsione e triedro di Frenet di α. In particolare, osservate il risultato per $b = 0$, cioè per una *circonferenza*.