

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

CORSO DI STUDI IN MATEMATICA

GEOMETRIA 3 – A.A. 2019/20

## Lezione 4

Alberto Albano

**Esercizio 1.** do Carmo, Esercizio 1-3.1

**Soluzione.** La curva  $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$  ha vettore tangente  $\alpha'(t) = (3, 6t, 6t^2)$ . La retta  $y = x - z = 0$  ha equazioni parametriche  $x = t, y = 0, z = t$  e quindi è parallela al vettore  $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ . Il prodotto scalare vale quindi

$$\alpha'(t) \cdot \mathbf{v} = 3 + 6t^2$$

e si ha, ponendo  $\theta(t) =$  angolo fra  $\alpha'(t)$  e  $\mathbf{v}$

$$\cos \theta(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot \mathbf{v}}{\|\alpha'(t)\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi l'angolo  $\theta(t)$  è costante e in effetti  $\theta(t) = \pi/4$ .

**Esercizio 2.** do Carmo, Esercizio 1-3.2

**Soluzione.**

**a.** Come si vede dalla figura, il punto sulla curva cercata sta sulla circonferenza di centro  $(t, 1)$ . Infatti,  $t$  è la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo al centro  $t$  (in radianti) e poiché la circonferenza rotola senza scivolamento,  $t$  è anche la lunghezza orizzontale percorsa durante il rotolamento.

Parametizziamo questa circonferenza. Rispetto alla parametrizzazione usuale, ci sono due differenze:

1. andiamo in verso *orario* e quindi il parametro sarà  $-s$
2. il punto di partenza è il *minimo* e cioè l'angolo iniziale è  $\pi/2$

La parametrizzazione è dunque (usiamo il parametro  $s$  per misurare l'angolo al centro e poiché la circonferenza ha raggio 1, il parametro è l'arcolunghezza):

$$\begin{cases} x = t + \cos(-s + \pi/2) & = t + \sin(-s) & = t - \sin(s) \\ y = 1 + \sin(-s + \pi/2) & = 1 - \cos(-s) & = 1 - \cos(s) \end{cases}$$

La cicloide è formata dai punti per cui  $s = t$  e si ottiene:

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

**b.** La lunghezza si ottiene integrando la norma del vettore velocità. Si ha

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= (1 - \cos t, \sin t) \\ \|\dot{\alpha}(t)\|^2 &= 1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) \\ \|\dot{\alpha}(t)\| &= \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\end{aligned}$$

e dunque

$$L = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

Ricordiamo le formule dell'angolo metà

$$\left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}$$

e poiché nell'integrazione  $t$  varia fra 0 e  $2\pi$ , il seno di  $t/2$  è sempre positivo e non abbiamo bisogno del valore assoluto. Si ottiene:

$$L = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8$$

**Esercizio 3.** do Carmo, Esercizio 1-3.4

**Soluzione.**

**a.** L'equazione parametrica della trattrice è:

$$\alpha(t) = \left( \sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$$

dove notiamo che  $t \in (0, \pi)$ . La derivata è

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \left( \cos t, -\sin t + \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(t/2)}}{\tan(t/2)} \right) \\ &= \left( \cos t, -\sin t + \frac{1}{2 \cos^2(t/2) \tan(t/2)} \right) \\ &= \left( \cos t, -\sin t + \frac{1}{2 \cos(t/2) \sin(t/2)} \right) \\ &= \left( \cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right) \\ &= \left( \cos t, \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} \right) \\ &= \left( \cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t} \right) \\ &= \cos t \left( 1, \frac{\cos t}{\sin t} \right) = \cos t (1, \cot t)\end{aligned}$$

Nota Bene:  $\cot = \text{cotangente}$ . Da questo è chiaro che l'unico punto in cui il vettore tangente si annulla è  $t = \pi/2$ .

b. Sia  $P(t) = \left( \sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$  un punto generico sulla trattrice. La retta tangente alla trattrice in  $P$  ha equazione (parametrica)

$$\mathbf{r}(u) = \alpha(t) + u\alpha'(t)$$

La coordinata  $x$  ha dunque equazione

$$x(u) = \sin t + u \cos t$$

e perciò l'intersezione con l'asse  $y$  si trova ponendo  $x(u) = 0$  e cioè  $u = -\tan t$ . Dunque il punto  $Q(t)$ , intersezione fra la trattrice e l'asse  $y$  ha coordinate

$$\begin{aligned} Q(t) &= \left( 0, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} - \tan t \cos t \cot t \right) \\ &= \left( 0, \log \tan \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

e la distanza fra  $P(t)$  e  $Q(t)$  vale

$$d(P(t), Q(t))^2 = (\sin t - 0)^2 + \left( \cos t + \log \tan \frac{t}{2} - \log \tan \frac{t}{2} \right)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

vale costantemente 1.

**Esercizio 4.** do Carmo, Esercizio 1-5.1

**Soluzione.** Questo esercizio è già stato svolto in classe. Riportiamo qui i calcoli completi, per futura referenza.

La parametrizzazione standard dell'elica di raggio  $a$  e passo  $2\pi b$  è:

$$\alpha(s) = \left( a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right)$$

dove  $c^2 = a^2 + b^2$

a. Il parametro  $s$  è l'arcolunghezza: basta calcolare la norma del vettore derivata:

$$\alpha'(s) = \left( -\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right) = \frac{1}{c} \left( -a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right)$$

e quindi

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{1}{c^2} \left( a^2 \sin^2 \frac{s}{c} + a^2 \cos^2 \frac{s}{c} + b^2 \right) = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

b. Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \left( -\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right) = \frac{a}{c^2} \left( -\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right) \\ \alpha''' &= \left( \frac{a}{c^3} \sin \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^3} \cos \frac{s}{c}, 0 \right) = \frac{a}{c^3} \left( \sin \frac{s}{c}, -\cos \frac{s}{c}, 0 \right) \\ \alpha' \wedge \alpha'' &= \left( \frac{ab}{c^3} \sin \frac{s}{c}, -\frac{ab}{c^3} \cos \frac{s}{c}, \frac{a^2}{c^3} \right) = \frac{a}{c^3} \left( b \sin \frac{s}{c}, -b \cos \frac{s}{c}, a \right) \\ (\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha''' &= \frac{a^2 b}{c^6} \end{aligned}$$

La curvatura si ottiene dalla prima formula di Frenet

$$k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{c^2} \sqrt{\cos^2 \frac{s}{c} + \sin^2 \frac{s}{c}} = \boxed{\frac{a}{a^2 + b^2}}$$

Per la torsione, calcoliamo con le formule per parametro qualunque, ricordando che  $c^2 = a^2 + b^2$ :

$$\tau(s) = \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha''\|^2} = \frac{a^2 b}{c^6} \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2} = \boxed{\frac{b}{a^2 + b^2}}$$

c. Il piano osculatore è quello generato da  $\mathbf{t}$  ed  $\mathbf{n}$  o, equivalentemente, il piano perpendicolare a  $\mathbf{b}$ . Il vettore binormale è parallelo a  $\alpha' \wedge \alpha''$  e quindi, per scrivere l'equazione del piano osculatore, possiamo usare direttamente  $\alpha' \wedge \alpha''$ . Perciò il piano osculatore nel punto  $\alpha(s)$  ha equazione:

$$b \sin \frac{s}{c} \left( x - a \cos \frac{s}{c} \right) - b \cos \frac{s}{c} \left( y - a \sin \frac{s}{c} \right) + a \left( z - b \frac{s}{c} \right) = 0$$

d. Poiché la parametrizzazione è per arcolunghezza,

$$\mathbf{t}' = \alpha'' = k \mathbf{n}$$

e quindi il vettore normale ha la direzione di  $\alpha''$ . Allora le rette richieste hanno equazione parametrica  $r(u) = \alpha(s) + u\alpha''(s)$  e cioè

$$\begin{cases} x = a \cos \frac{s}{c} - u \cos \frac{s}{c} \\ y = a \sin \frac{s}{c} - u \sin \frac{s}{c} \\ z = b \frac{s}{c} \end{cases}$$

dunque incontrano tutte l'asse  $z$ , per il valore  $u = a$  del parametro. Inoltre, poiché la componente  $z$  è costante, sono tutte rette parallele al piano  $xy$  e cioè sono perpendicolari all'asse  $z$ .

e. Basta ricordare che il vettore tangente è

$$\mathbf{t} = \frac{1}{c} \left( -a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right)$$

e quindi il prodotto scalare con il versore  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  è costante e dunque l'angolo formato da  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{k}$  è costante.

$$\cos \widehat{\mathbf{t}(s)\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{t}(s)\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{b}{c} = \tau(s)$$

**Esercizio 5.** do Carmo, Esercizio 1-5.2

**Soluzione.** Questo esercizio ha un suggerimento al fondo del libro. Usiamo il suggerimento e svolgiamo i calcoli. Si hanno le formule (ricordate nel suggerimento):

$$\alpha' = \mathbf{t}, \quad \alpha'' = k \mathbf{n}$$

da cui, derivando ancora e usando le formule di Frenet

$$\alpha''' = k\mathbf{n}' + k'\mathbf{n} = -k^2\mathbf{t} + k\tau\mathbf{b} + k'\mathbf{n}$$

Dunque  $\alpha' \wedge \alpha'' = k\mathbf{b}$  e moltiplicando scalarmente per  $\alpha'''$  si ha

$$(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha''' = k^2\tau$$

e da qui la tesi.

**Esercizio 6.** do Carmo, Esercizio 1-5.7

**Soluzione.** Anche in questo caso sul do Carmo c'è un suggerimento. Osserviamo anche che la curva è piana, e quindi la torsione  $\tau$  è identicamente nulla.  
**a.** Sia  $\alpha(s)$  la parametrizzazione per arcolunghezza. Allora la curva  $\beta$  diventa:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$$

Calcoliamo il vettore tangente a  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t} - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} + \frac{1}{k(s)}k(s)\mathbf{t} \\ &= -\frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} \end{aligned}$$

e cioè il vettore tangente a  $\beta$  è normale ad  $\alpha$ . Vediamo che proprio le rette coincidono: la retta tangente nel punto  $\beta(s)$  è

$$\begin{aligned} r(u) &= \beta(s) - u \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} \\ &= \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s) - u \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} \\ &= \alpha(s) + \frac{k(s) - uk'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} \end{aligned}$$

e questa è la retta normale nel punto  $\alpha(s)$ .

**b.** Questo punto è svolto completamente sul do Carmo (nello svolgimento si fa tendere  $s_2$  a  $s_1$ , mentre nel testo dell'esercizio è il contrario). Come prima, la curva  $\alpha(s)$  è parametrizzata per arcolunghezza. In due punti  $s_1$  e  $s_2$  le rette normali sono

$$\mathbf{r}_1(u) = \alpha(s_1) + u\mathbf{n}(s_1), \quad \mathbf{r}_2(v) = \alpha(s_2) + v\mathbf{n}(s_2)$$

Consideriamo  $s_1$  fissato e facciamo variare  $s_2$ . L'intersezione si ottiene per valori  $u(s_2), v(s_2)$  che dipendono da  $s_2$  tali che  $\mathbf{r}_1(u(s_2)) = \mathbf{r}_2(v(s_2))$  e per questi valori si ha:

$$\alpha(s_2) - \alpha(s_1) = u(s_2)\mathbf{n}(s_1) - v(s_2)\mathbf{n}(s_2);$$

dividendo entrambi i membri per la stessa quantità  $(s_2 - s_1)$  si ottiene

$$\frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{u(s_2) \mathbf{n}(s_1) - v(s_2) \mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1}$$

e passando al limite si trova

$$\alpha'(s_1) = \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} = \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{u(s_2) \mathbf{n}(s_1) - v(s_2) \mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1}$$

e quindi, moltiplicando scalarmente il primo e l'ultimo termine per  $\alpha'(s_1)$  si ha, ricordando che  $\alpha'(s_1) = \mathbf{t}(s_1)$ :

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha'(s_1) \cdot \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{u(s_2) \mathbf{n}(s_1) - v(s_2) \mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} && \text{perché } \alpha'(s_1) \text{ ha norma } 1 \\ &= \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left( \alpha'(s_1) \cdot \frac{u(s_2) \mathbf{n}(s_1) - v(s_2) \mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} \right) && \text{perché } \alpha'(s_1) \text{ è costante} \\ &= - \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left( \alpha'(s_1) \cdot \frac{v(s_2) \mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} \right) && \text{perché } \alpha'(s_1) \text{ è perpendicolare a } \mathbf{n}(s_1) \end{aligned}$$

Usando il teorema sul prodotto dei limiti si ha:

$$\begin{aligned} 1 &= - \left( \lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) \right) \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left( \alpha'(s_1) \cdot \frac{\mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} \right) \\ &= - \left( \lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) \right) \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left( \alpha'(s_1) \cdot \frac{\mathbf{n}(s_2) - \mathbf{n}(s_1)}{s_2 - s_1} \right) \\ &= - \left( \lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) \right) \alpha'(s_1) \cdot \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left( \frac{\mathbf{n}(s_2) - \mathbf{n}(s_1)}{s_2 - s_1} \right) \\ &= - \left( \lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) \right) \alpha'(s_1) \cdot \mathbf{n}'(s_1) \end{aligned}$$

dove il secondo uguale risulta nuovamente dal fatto che  $\alpha'(s_1) = \mathbf{t}(s_1)$  è perpendicolare a  $\mathbf{n}(s_1)$  e il terzo uguale dal fatto che  $\alpha'(s_1)$  è costante al variare di  $s_2$ . Dunque

$$\lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) = - \frac{1}{\mathbf{t}(s_1) \cdot \mathbf{n}'(s_1)} = \frac{1}{k(s_1)}$$

dalla seconda formula di Frenet e si ha la tesi: il punto limite è

$$\lim_{s_2 \rightarrow s_1} \alpha(s_2) + v(s_2) \mathbf{n}(s_2) = \alpha(s_1) + \frac{1}{k(s_1)} \mathbf{n}(s_1)$$

e cioè appartiene all'evolva (ricordare che  $\alpha(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  sono continue).

#### Esercizio 7. do Carmo, Esercizio 1-5.10

**Soluzione.** Questo esercizio spiega l'importanza della condizione di biregolarità. Se la curvatura si annulla in un punto isolato, potremmo pensare di definire il vettore normale in quel punto come il limite dei vettori normali. Questo esempio mostra una curva per cui la funzione "vettore normale" non ammette limite e quindi non si può estendere la definizione di vettore normale per continuità. È però possibile definire la torsione in modo continuo in questi punti

ottenendo una curva non piana la cui torsione è sempre nulla (l'equivalenza fra planarità e torsione nulla è stato dimostrato con l'ipotesi di curva biregolare).

**a.** La coordinata  $x(t) = t$  è evidentemente di classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Il punto dell'esercizio è calcolare le derivate della funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

Questa è la coordinata  $z(t)$ . La  $y(t)$  ha gli intervalli scambiati e il calcolo è lo stesso. È chiaro che  $f(t)$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$  per  $t \neq 0$ . Inoltre, tutte le derivate *sinistre* di  $f(t)$  per  $t = 0$  sono nulle. Dobbiamo quindi calcolare le derivate destre. Usiamo un lemma di Analisi, la cui dimostrazione è un esercizio sull'uso del teorema di Lagrange:

**Lemma 0.1.** *Sia  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  definita e continua in un intorno di 0. Se  $f$  è:*

1. *derivabile in tutti i punti dell'intorno tranne al più in  $t = 0$*
2. *esistono i limiti  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f'(t)$*

*allora esistono i limiti*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

*e sono uguali ai limiti precedenti.*

*Dimostrazione.* Sia  $0 < t < \varepsilon$  e applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo  $[0, t]$ . Si ha che

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(u)$$

con  $0 < u < t$ . Prendendo il limite per  $t \rightarrow 0$  si ha il risultato per il limite destro. La dimostrazione per il limite sinistro è identica. □

Dunque per avere le derivate destre *nulle* in  $t = 0$  basta dimostrare che per ogni  $n \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n)}(t) = 0$$

**Lemma 0.2.** *Per ogni  $n \geq 0$  esiste un polinomio  $p_n(T)$  di grado  $3n$  tale che per  $t > 0$  si ha*

$$\left( e^{-1/t^2} \right)^{(n)} = e^{-1/t^2} p_n(1/t)$$

*Dimostrazione.* La formula vale ovviamente per  $n = 0$ , con  $p_0(T) = 1$ .

Supponiamo la formula vera per un valore fissato  $n$ . Allora

$$\begin{aligned} \left( e^{-1/t^2} \right)^{(n+1)} &= \left( e^{-1/t^2} p_n(1/t) \right)' \\ &= e^{-1/t^2} (2/t^3) p_n(1/t) - e^{-1/t^2} p_n'(1/t) (1/t^2) \\ &= e^{-1/t^2} \left[ (2/t^3) p_n(1/t) - p_n'(1/t) (1/t^2) \right] \\ &= e^{-1/t^2} p_{n+1}(1/t) \end{aligned}$$

dove  $p_{n+1}(T) = 2T^3 p_n(T) - T^2 p_n'(T)$  è un polinomio di grado  $3n + 3$ . □

Dunque

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (e^{-1/t^2})^{(n)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{p_n(T)}{e^{T^2}} = 0$$

e perciò la curva  $\alpha(t)$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su tutto  $\mathbb{R}$ .

**b.** Il vettore tangente è

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (1, 0, \frac{2}{t^3}e^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (1, \frac{2}{t^3}e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (1, 0, 0) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

e quindi la curva è regolare. Calcolando la derivata seconda, si ha

$$\alpha''(t) = \begin{cases} (0, 0, -2\frac{3t^2-2}{t^6}e^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (0, -2\frac{3t^2-2}{t^6}e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

e quindi la curvatura non è nulla per  $t \neq 0$ ,  $t \neq \pm\sqrt{2/3}$ . Inoltre è chiaro che la curvatura  $k(0) = 0$ .

**c.** Il piano osculatore è generato dal vettore tangente e dal vettore normale, o anche dai vettori  $\alpha'$  e  $\alpha''$ . Quando sono entrambi non nulli, il piano osculatore è perpendicolare al vettore  $\alpha' \wedge \alpha''$ . Per valori di  $t$  vicini a 0 si ha:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{cases} (0, 2\frac{3t^2-2}{t^6}e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t > 0 \\ (0, 0, -2\frac{3t^2-2}{t^6}e^{-1/t^2}) & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

e quindi il piano osculatore è costantemente il piano  $xz$  per  $t > 0$  e il piano  $xy$  per  $t < 0$ . In particolare, il vettore normale non può essere esteso con continuità per  $t = 0$ . Notiamo che invece il vettore tangente è continuo (questo è ovvio, la curva è regolare).

**d.** È chiaro che la curva è contenuta nel piano  $xz$  per  $t > 0$  e nel piano  $xy$  per  $t < 0$ . Quindi la torsione è identicamente nulla per  $t \neq 0$  e può essere estesa con continuità ponendo  $\tau(0) = 0$ .

**Esercizio 8.** do Carmo, Esercizio 1-5.13

**Soluzione.** La soluzione è scritta sul do Carmo. Rivediamo insieme i passaggi, ricordando che la nostra convenzione sulla torsione è all'opposto di quella del do Carmo. L'enunciato non cambia, perché coinvolge solo il quadrato della torsione ma i calcoli sono leggermenti diversi.

**necessaria.** Possiamo ovviamente supporre che  $\alpha(s)$  sia parametrizzata per arcolunghhezza. Dall'ipotesi che la curva sia su una sfera e supponendo che il centro della sfera sia l'origine, cosa possibile a meno di una traslazione, si ha che

$$\|\alpha(s)\|^2 = c$$



è costante. Derivando si ottiene

$$2\alpha(s) \cdot \alpha'(s) = 0$$

e cioè  $\alpha(s) = A(s)\mathbf{n}(s) + B(s)\mathbf{b}(s)$  (perché è perpendicolare a  $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ ). Derivando e usando le formule di Frenet si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{t} = \alpha' &= A'\mathbf{n} + A\mathbf{n}' + B'\mathbf{b} + B\mathbf{b}' \\ &= A'\mathbf{n} + A(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + B'\mathbf{b} - \tau B\mathbf{n} \\ &= -kA\mathbf{t} + (A' - \tau B)\mathbf{n} + (A\tau + B')\mathbf{b}\end{aligned}$$

e poiché  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  è una base, possiamo uguagliare i coefficienti e otteniamo

$$1 = -kA, \quad 0 = A' - \tau B$$

Ricordando che per ipotesi la torsione è sempre non nulla ricaviamo

$$A = -1/k, \quad B = -A'/\tau$$

Le notazioni del do Carmo sono

$$R = 1/k, \quad T = 1/\tau$$

dove però la torsione del do Carmo è l'opposta di come la abbiamo definita noi. Tenendo conto di questo segno si ottiene

$$A = -R, \quad B = -R'T$$

da cui possiamo finalmente scrivere:

$$\alpha(s) = -R(s)\mathbf{n}(s) - R'(s)T(s)\mathbf{b}(s)$$

che ha norma costante per ipotesi e cioè  $R^2 + (R'T)^2$  è costante.

**sufficiente.** Poniamo

$$\beta(s) = \alpha(s) + R(s)\mathbf{n}(s) + R'(s)T(s)\mathbf{b}(s)$$

(di nuovo, attenzione al segno). Da quello che abbiamo visto prima, questo dovrebbe essere costante (è il centro della sfera che stiamo cercando). Senza il suggerimento è difficile che venga in mente di considerare questa espressione. Dopo aver fatto la dimostrazione della necessità si capisce che questa è proprio quello che serve analizzare.

Per dimostrare che è effettivamente costante, deriviamo usando le formule di Frenet per  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\beta' &= \alpha' + R'\mathbf{n} + R\mathbf{n}' + (R'T)'\mathbf{b} + R'T\mathbf{b}' \\ &= \mathbf{t} + R'\mathbf{n} + R(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + (R'T)'\mathbf{b} - R'T\tau\mathbf{n} \\ &= (1 - Rk)\mathbf{t} + (R' - R'T\tau)\mathbf{n} + (R\tau + (R'T)')\mathbf{b}\end{aligned}$$

e ricordando che  $R = 1/k$  e  $T = 1/\tau$  si ottiene

$$\beta' = (R\tau + (R'T)')\mathbf{b}$$

Usiamo ora l'ipotesi e cioè  $R^2 + (R'T)^2 = \text{costante}$ . Derivando e ricordando che  $T = 1/\tau$ :

$$0 = 2RR' + 2(R'T)(R'T)' = \frac{2R'}{\tau} (R\tau + (R'T)')$$

e poiché  $\tau \neq 0$  e  $k' \neq 0$  (per ipotesi) deve essere  $(R\tau + (R'T)') = 0$  e quindi  $\beta'(s) \equiv 0$ . Dunque  $\beta(s) = p_0$  è costante e allora

$$\|\alpha(s) - p_0\|^2 = R^2 + (R'T)^2$$

è costante e cioè  $\alpha(s)$  sta su una sfera di centro  $p_0$ .