

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

CORSO DI STUDI IN MATEMATICA

GEOMETRIA 3 – A.A. 2019/20

Lezione 5

Alberto Albano

1 Introduzione

Fino ad ora abbiamo considerato le curve come funzioni definite su un intervallo e cioè abbiamo considerato quelle che più propriamente dovremmo chiamare *archi di curva*. La definizione di curva coinvolge ipotesi di natura *locale*, come l'esistenza di derivate e anche le quantità che abbiamo introdotto, la curvatura e la torsione, sono di natura locale in quanto definite tramite derivate.

Un aspetto interessante della geometria differenziale è vedere come le quantità locali danno informazioni sulla geometria o sulla topologia *globale* della curva, pensata quindi come sottoinsieme dello spazio ambiente \mathbb{R}^3 o come spazio topologico a se stante.

Sul libro di do Carmo (così come sull'Abate-Tovena e su quasi tutti i libri di geometria differenziale) vi sono alcuni esempi di *teoria globale* delle curve. In generale questi teoremi sono per curve piane e sono di natura geometrica. Per esempio, citiamo qui un paio di questi risultati:

Disuguaglianza Isoperimetrica. *Sia C una curva piana chiusa e semplice di lunghezza ℓ e sia A l'area della regione di cui C è bordo. Allora*

$$4\pi A \leq \ell^2$$

e l'uguaglianza vale se e solo se C è una circonferenza.

Vedi, per esempio, do Carmo, Paragrafo 1.7, Theorem 1 a pag. 34, oppure Abate-Tovena, Complementi al Capitolo 2, Teorema 2.7.3 a pag. 103. Osserviamo solo che una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice

- *chiusa* se $I = [a, b]$ è chiuso e limitato e $\alpha(a) = \alpha(b)$
- *semplice* se la funzione α è iniettiva (nel caso di una curva chiusa, gli unici punti ad avere la stessa immagine sono gli estremi a e b)

Questo risultato dice che, a parità di area, la circonferenza è la curva di perimetro *minimo* fra tutte le curve che circondano una regione di area data o equivalentemente che fra tutte le curve di lunghezza fissata la circonferenza è quella che racchiude l'area maggiore. Questo enunciato era ben noto già nell'antichità, come dimostra l'episodio di Didone e la fondazione di Cartagine, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Didone.

Un altro risultato, sempre per curve piane chiuse e semplici, è il cosiddetto *Teorema dei quattro vertici*. In una curva piana, un *vertice* è un punto in cui $k'(t) = 0$ e cioè la curvatura è massima o minima. La parametrizzazione di una curva chiusa ha dominio un compatto e quindi ci sono sicuramente almeno *due* vertici, corrispondenti al massimo e al minimo assoluti. Il teorema afferma che in effetti ci sono sempre almeno *quattro* vertici

Teorema dei quattro vertici. *Una curva piana chiusa e semplice ha almeno quattro vertici.*

Vedi, per esempio, do Carmo, Paragrafo 1.7, Theorem 2 a pag. 39, oppure Abate-Tovena, Complementi al Capitolo 2, Teorema 2.6.3 a pag. 98. Sul do Carmo la dimostrazione è solo per curve convesse, sull'Abate-Tovena c'è una dimostrazione che vale per ogni curva, ma è più complicata.

In questa lezione, che conclude la parte di corso sulle curve, vedremo due teoremi sull'interazione locale-globale di natura un po' diversa per curve nello spazio e che legano la *curvatura totale* a caratteristiche *topologiche* della curva.

Chiudiamo questa introduzione con le definizioni degli oggetti che sono coinvolti nei due teoremi che studieremo. Per prima cosa, precisiamo il concetto di curva chiusa *differenziabile*:

Definizione 1.1. Sia $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare parametrizzata per arcolunghezza e sia C la curva determinata da α . La curva C si dice *chiusa* se $\alpha(0) = \alpha(L)$

Notiamo che nei punti 0 e L , gli estremi dell'intervallo di definizione, ci sono solo le derivate destre, rispettivamente sinistre, della funzione α . Dire che la curva C è differenziabile, significa che

$$\alpha'_+(0) = \alpha'_-(L), \quad \alpha''_+(0) = \alpha''_-(L), \quad \dots \quad \alpha^{(n)}_+(0) = \alpha^{(n)}_-(L), \dots$$

Useremo solo le derivate prime e seconde, quindi potremmo anche solo chiedere le prime due uguaglianze. Osserviamo ancora che:

- Non stiamo supponendo che la curva sia biregolare. Useremo il concetto di curvatura ma non useremo i vettori normale e binormale.
- Poiché la curva è parametrizzata per arcolunghezza, il numero reale L è la lunghezza della curva.

Introduciamo ora la *curvatura totale*. Notiamo che la definizione ha senso sia per curve chiuse che per curve non chiuse. Sia $k(s)$ la funzione curvatura della curva C :

Definizione 1.2. La *curvatura totale* di C è il numero

$$\kappa(C) = \int_0^L k(s) ds$$

dove l'integrale scritto è un integrale ordinario, perché la funzione $k(s)$ è definita sul dominio $[0, L]$.

Osservazione. Poiché le curve che consideriamo sono parametrizzate per arcolunghezza, il vettore tangente ha norma costante e quindi la sua derivata (la curvatura) misura la variazione di direzione del vettore tangente.

Di conseguenza, la curvatura totale è la *variazione totale di direzione del vettore tangente*. La curvatura è sempre *positiva* (è il modulo del vettore derivata seconda) per definizione e questo significa che ogni variazione di direzione contribuisce alla curvatura totale: non ci sono “cancellazioni”, come potremmo pensare considerando una curva il cui vettore tangente oscilla, come per esempio il grafico della funzione seno. La derivata prima (il vettore tangente) segue l’andamento della funzione coseno e la curvatura (la derivata seconda) segue l’andamento della funzione $-\text{seno}$. L’integrale di $-\text{seno}$ fra 0 e 2π è 0, ma la curvatura è il *valore assoluto* e l’integrale (cioè la curvatura totale) è non nullo.

I teoremi che vedremo legano il valore di $\kappa(C)$ con proprietà topologiche della curva C . Per la loro dimostrazione occorrono alcuni semplici fatti sulla teoria delle superfici, che affronteremo in seguito. Però l’unica superficie che considereremo sarà una sfera di raggio 1 e le proprietà che servono sono ben note dalla geometria elementare. In particolare:

- Se P e Q sono due punti sulla sfera, la curva di lunghezza minima che congiunge P e Q è l’arco di cerchio massimo da P a Q , cioè l’arco della circonferenza che si ottiene come intersezione della sfera e del piano passante per i tre punti P , Q e O (= centro della sfera).
- L’area della sfera vale 4π (in generale, l’area di una sfera di raggio R vale $4\pi R^2$).

2 Il teorema di Fenchel

Diamo subito l’enunciato:

Teorema 2.1. *Se C è una curva chiusa, allora $\kappa(C) \geq 2\pi$ e l’uguaglianza vale se e solo se C è una curva piana e convessa.*

Dall’interpretazione delle curvatura totale come la variazione totale di direzione del vettore tangente, possiamo enunciare questo teorema come

per avere una curva chiusa bisogna fare almeno un giro

Osserviamo che naturalmente il viceversa non vale: considerando un’elica, basta fare due o più giri e la curvatura totale aumenta senza che l’elica sia una curva chiusa. Quello che dice il teorema è: se la curvatura totale è troppo piccola (meno di 2π) la curva è necessariamente aperta.

Vedremo solo la dimostrazione della disuguaglianza. Fissiamo le notazioni

$$\begin{array}{ll} \alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3 & \text{curva parametrizzata per arcolunghezza} \\ \mathbf{t}(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s)) & \text{il vettore tangente, di norma 1} \\ k(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| & \text{la funzione curvatura} \end{array}$$

La dimostrazione usa una curva associata alla curva C , l’*indicatrice delle tangenti* Γ definita da $\Gamma(s) = \mathbf{t}(s)$

$$\Gamma : [0, L] \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

e cioè pensiamo il punto finale del vettore tangente $\mathbf{t}(s)$ come punto nello spazio \mathbb{R}^3 . Poiché il vettore tangente ha norma costante 1, l'immagine di questa curva è tutta contenuta nella sfera S^2 di centro l'origine e raggio 1.

Una relazione immediata fra la curva C e la sua indicatrice delle tangenti Γ è:

$$\kappa(C) = \int_0^L k(s) ds = \int_0^L \|\mathbf{t}'(s)\| ds = \ell(\Gamma) = \text{lunghezza di } \Gamma$$

Facciamo un paio di esempi

Esempio 2.2. Se C è una curva piana, possiamo scrivere $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$ e quindi $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s), 0)$. Perciò Γ è contenuta nell'*equatore* della sfera S^2 (intersezione della sfera con il piano orizzontale $z = 0$).

Esempio 2.3. Continuando con la terminologia geografica, la sfera S^2 è divisa in due parti dall'equatore: l'emisfero "nord" e l'emisfero "sud". La parte di Γ che sta nell'emisfero nord corrisponde a quando la curva C "sale", la parte che sta nell'emisfero sud corrisponde a quando la curva C "scende" (sale e scende relativamente all'altezza misurata sull'asse z).

Infatti, se il vettore tangente sta nell'emisfero nord, allora punta "all'insù" e cioè la curva sta salendo (la quota z aumenta) e il ragionamento è analogo per l'emisfero sud.

Il teorema di Fenchel è una conseguenza immediata dei due lemmi seguenti:

Lemma A.

1. *L'indicatrice della tangenti Γ di una curva chiusa C non è contenuta in nessuna semisfera aperta.*
2. *L'indicatrice Γ è contenuta in una semisfera chiusa se e solo se C è piana.*

Lemma B. *Sia Γ una curva chiusa (qualunque) contenuta nella sfera S^2 di raggio 1.*

1. *Se $\ell(\Gamma) < 2\pi$ allora Γ è contenuta in una semisfera aperta.*
2. *Se $\ell(\Gamma) = 2\pi$ allora Γ è contenuta in una semisfera chiusa.*

dove $\ell(\Gamma)$ indica la lunghezza della curva Γ .

Possiamo adesso dare la

Dimostrazione del teorema di Fenchel. Se C è chiusa allora per il punto 1 del Lemma A la sua indicatrice Γ non è contenuta in nessuna semisfera aperta e quindi, per il punto 1 del Lemma B si ha

$$\kappa(C) = \ell(\Gamma) \geq 2\pi$$

e questo dimostra la disuguaglianza.

Per l'uguaglianza, è chiaro che se C è piana e convessa (cioè la regione di cui C è bordo è convessa) allora l'indicatrice Γ è l'equatore percorso una volta e quindi $\kappa(C) = 2\pi$.

Viceversa, se $\kappa(C) = 2\pi$ allora $\ell(\Gamma) = 2\pi$ e quindi per il punto 2 del Lemma B l'indicatrice Γ è contenuta in una semisfera chiusa e per il punto 2 del Lemma A la curva C è piana.

Resta da dimostrare che in questo caso C è anche convessa. Non vedremo questa dimostrazione. \square

Per concludere, dimostriamo i due lemmi. Il primo è un semplice calcolo, il secondo è più interessante e richiede un argomento geometrico.

Dimostrazione del Lemma A. Supponiamo che l'indicatrice Γ sia contenuta in una semisfera. A meno di rotazioni, possiamo supporre che Γ sia nell'emisfero nord dato da $z \geq 0$. Allora per la componente $t_3(s)$ del vettore tangente si ha

$$t_3(s) \geq 0, \quad \text{per ogni } s \in [0, L]$$

e integrando:

$$\int_0^L t_3(s) ds = \left(\int_0^L \mathbf{t}(s) ds \right)_3 = (\alpha(L) - \alpha(0))_3 = 0$$

perché la curva è chiusa e quindi $\alpha(0) = \alpha(L)$ (Nota: con $(\dots)_3$ indichiamo la terza componente del vettore tra le parentesi).

Concludiamo che:

1. $t_3(s)$ non può essere sempre strettamente positivo (altrimenti l'integrale sarebbe strettamente positivo) e quindi Γ non può essere contenuta nella semisfera aperta data dall'emisfero nord senza l'equatore.
2. abbiamo $t_3(s) \geq 0$, $\int_0^L t_3(s) ds = 0$ e $t_3(s)$ è una funzione *continua*. Questo implica che $t_3(s)$ deve essere identicamente nulla e quindi C giace in un piano orizzontale (la componente $z(s)$ di $\alpha(s)$ ha derivata costantemente nulla e quindi è costante).

□

Esercizio 2.4. Dimostrare l'affermazione di Analisi utilizzata nella dimostrazione del punto 2: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

- $f(s) \geq 0$ per ogni $s \in [a, b]$
- $\int_0^L f(s) ds = 0$

Allora la funzione f è costantemente nulla.

Vediamo adesso la dimostrazione del Lemma B. Usiamo le stesse notazioni dell'articolo di Horn disponibile nei materiali della lezione.

Dimostrazione del Lemma B. Il punto di partenza è una curva Γ chiusa contenuta nella sfera S^2 . Fissiamo un verso di percorrenza su Γ : tutti gli archi della curva saranno percorsi in questo verso.

Siano P e Q su Γ due punti in modo che la lunghezza dell'arco di curva che va da P a Q sia uguale alla lunghezza dell'arco da Q a P . Per vedere che è possibile, basta scegliere un punto P qualunque. Poiché la lunghezza di Γ è *finita*, basta prendere Q a distanza da P metà della lunghezza di Γ . In questo modo dividiamo Γ in due archi, di uguale lunghezza e scriviamo

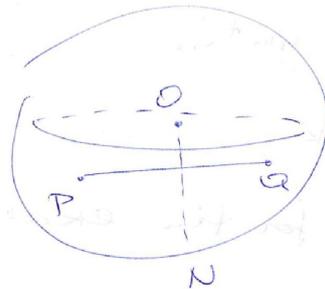
$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

dove $\ell(\Gamma_1) = \ell(\Gamma_2) = \frac{1}{2} \ell(\Gamma)$.

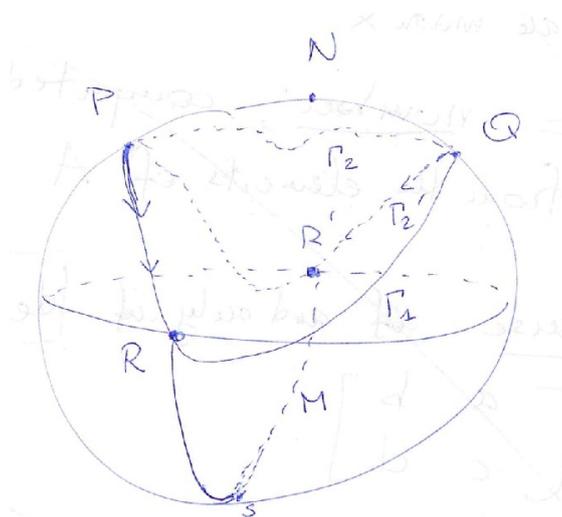
Ora ruotiamo la sfera in modo che P e Q siano simmetrici rispetto al polo nord N e cioè si verifica una (e solo una) delle alternative seguenti

- $P = Q = N$ oppure
- P e Q hanno la stessa latitudine e longitudini che differiscono di 180°

Se $P \neq Q$ basta prendere la corda \overline{PQ} , l'asse \overline{ON} della corda e ruotare in modo da avere N al polo nord, come nella figura seguente:



Prima di proseguire con la dimostrazione, facciamo un disegno



Se Γ non incontra l'equatore, la tesi è dimostrata, perché sta nell'emisfero nord, dove stanno i punti P e Q .

Se Γ incontra l'equatore, sia R un punto di Γ che sta sull'equatore e possiamo supporre che sia $R \in \Gamma_1$. Consideriamo adesso Γ'_2 la curva simmetrica di Γ_1 rispetto ad N (vedi figura), cioè la curva che si ottiene prendendo per ogni punto di Γ_1 il simmetrico rispetto ad N .

Chiamiamo questa nuova curva Γ'_2 perché vogliamo confrontarla con Γ_2 .

Per costruzione si ha $\ell(\Gamma'_2) = \ell(\Gamma_1)$ e poniamo

$$\Gamma' = \Gamma_1 + \Gamma'_2$$

cioè la curva che si ottiene percorrendo Γ_1 da P a Q e poi continuando su Γ'_2 per andare da Q a P . Si ha

$$\ell(\Gamma') = \ell(\Gamma_1) + \ell(\Gamma'_2) = 2\ell(\Gamma_1) = \ell(\Gamma)$$

perché ricordiamo che Γ_1 ha lunghezza metà di quella di Γ . Ma adesso la curva Γ' contiene due punti antipodali: R (l'intersezione di Γ con l'equatore) e il suo simmetrico R' . Scriviamo

$$\Gamma' = \Gamma_{RR'} + \Gamma_{R'R}$$

per indicare i due archi di estremi R e R' che compongono Γ' .

Sia M il meridiano che unisce R e R' e passa per il polo sud S . Si ha:

1. $\ell(M) = \pi$ perché è metà di una circonferenza massima
2. $\ell(M) \leq \ell(\Gamma_{RR'})$ e $\ell(M) \leq \ell(\Gamma_{R'R})$ perché il meridiano è il cammino più breve sulla sfera che unisce i punti R e R' .

da cui si ha

$$\ell(\Gamma) = \ell(\Gamma') = \ell(\Gamma_{RR'}) + \ell(\Gamma_{R'R}) \geq 2\pi$$

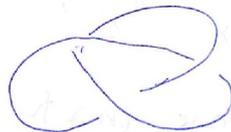
Abbiamo perciò la tesi:

1. se $\ell(\Gamma) < 2\pi$, allora Γ non attraversa l'equatore (R non può esistere) e quindi Γ è contenuta nell'emisfero nord *aperto*.
2. se $\ell(\Gamma) = 2\pi$, allora Γ tocca l'equatore ma non lo attraversa e quindi Γ è contenuta nell'emisfero nord *chiuso* (compreso l'equatore).

□

3 Il teorema di Milnor

Il teorema di Milnor parla di *nodi*: per esempio



nodo trifoglio



nodo banale

La definizione precisa è:

Definizione 3.1. Un *nodo* C è l'immagine omeomorfa di una circonferenza nello spazio e cioè l'immagine di una funzione continua $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

1. α è iniettiva su $[0, L)$
2. $\alpha(0) = \alpha(L)$
3. $\alpha([0, L]) = C$ con la topologia indotta da \mathbb{R}^3 è omeomorfa ad una circonferenza.

Come si vede nel secondo esempio, anche una semplice circonferenza rispetta la definizione di nodo, però è un caso speciale. Possiamo caratterizzarlo in questo modo: denotiamo con D^2 il disco in \mathbb{R}^2 e con S^1 la circonferenza bordo di D^2 .

Definizione 3.2. Un nodo C si dice *nodo banale* o *non nodo* se esiste una funzione continua $F : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F(S^1) = C$.

Intuitivamente un nodo banale può essere contratto ad un punto senza mai intersecarsi (è abbastanza intuitivo che questo non si può fare con un nodo trifoglio).

La curvatura totale di un nodo banale può essere piccola: nel caso della circonferenza è 2π , che è il minimo possibile per il teorema di Fenchel visto che un nodo è sempre una curva chiusa.

Però per fare un trifoglio sembra necessaria una curvatura totale maggiore di 2π . Il teorema di Milnor afferma proprio questo:

Primo teorema di Milnor. *Sia C una curva chiusa in \mathbb{R}^3 . Se C è annodata (cioè non è un nodo banale) allora $\kappa(C) \geq 4\pi$.*

Come per il teorema di Fenchel, dall'interpretazione delle curvatura totale come la variazione totale di direzione del vettore tangente, possiamo enunciare questo teorema come

per avere una curva annodata bisogna fare almeno due giri

Osserviamo che anche in questo caso il viceversa non vale: considerando un'elica, basta fare due o più giri e poi tornare al punto di partenza rimanendo all'esterno dell'elica e la curvatura totale aumenta senza che l'elica sia una curva annodata. Quello che dice il teorema è: se la curvatura totale è troppo piccola (meno di 4π) la curva è necessariamente snodata.

Osservazione. Il nome del teorema è dovuto al fatto che questo è il primo teorema dimostrato da John Milnor¹ quando aveva diciassette anni ed era studente al primo anno di università a Princeton.

La leggenda narra che un giorno Milnor, arrivato a lezione, avesse commentato con un suo compagno sulla grande difficoltà di un esercizio assegnato per quel giorno. Il suo compagno disse che i problemi non erano particolarmente difficili e Milnor rispose indicando il problema sulla curvatura totale dei nodi. A questo punto il compagno, sbalordito, replicò che quello non era un esercizio assegnato, ma una congettura!

Apparentemente Milnor era arrivato in ritardo a lezione la settimana prima e, entrando in classe, aveva visto il problema scritto sulla lavagna e aveva pensato che fosse uno degli esercizi da risolvere per la settimana dopo. Invece era una famosa congettura di Borsuk² che Milnor risolse in pochi giorni.

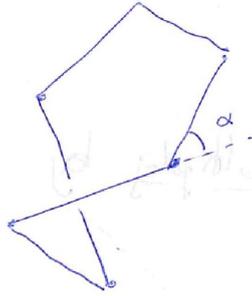
John Milnor è uno dei migliori matematici della seconda metà del Novecento, vincitore della Medaglia Fields nel 1962.

La dimostrazione non è particolarmente difficile, ma molto ingegnosa. Non vediamo tutti i dettagli, ma vogliamo almeno indicare la strategia. La dimostrazione completa, scritta in modo molto comprensibile, si trova nell'articolo di Spivak presente nei materiali per la lezione.

Milnor comincia con l'osservare che è sufficiente dimostrare il teorema nel caso dei poligoni. In effetti, nell'enunciato del teorema si parla di curvatura totale e quindi serve una curva di classe almeno \mathcal{C}^2 , però è possibile definire il concetto di curvatura totale di un poligono in modo geometrico.

¹vedi <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Milnor.html> per una biografia di Milnor

²vedi <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Borsuk.html> per una biografia di Borsuk



La curvatura è nulla lungo i lati e nei vertici il contributo alla variazione di direzione del vettore tangente è l'*angolo esterno*. Definiamo perciò, per un poligono C

$$\kappa(C) = \sum \text{angoli esterni}$$

Ricordiamo che la formula della lunghezza di una curva regolare come integrale del modulo del vettore tangente è giustificata dal fatto che questa quantità è l'estremo superiore delle lunghezze dei poligoni inscritti nella curva. Allo stesso modo, Milnor dimostra che

Lemma 3.3. *Sia C una curva di classe \mathcal{C}^2 . Allora*

$$\int_0^L k(s) ds = \sup\{\kappa(P)\}$$

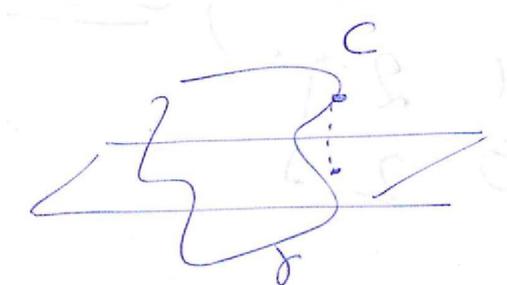
dove l'estremo superiore è preso sull'insieme di tutti i poligoni P inscritti nella curva C (cioè con i vertici appartenenti alla curva C).

Milnor dimostra che se il teorema è vero per tutti i poligoni, allora è vero per tutte le curve. La dimostrazione di questo fatto è piuttosto tecnica e usa dei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale che vedrete l'anno prossimo nel corso di Analisi Matematica 3 (in particolare, il teorema della convergenza monotona). Se volete vedere l'argomento, leggete Spivak, seconda metà di pagina 36.

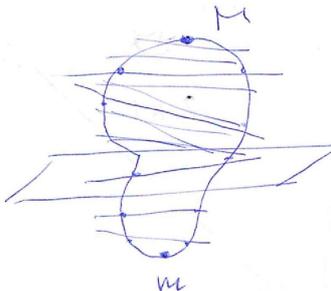
Dopo questi preliminari, d'ora in poi ci occuperemo solo di poligoni. Dobbiamo trovare un modo geometrico per capire quando una curva chiusa è il bordo di un disco in \mathbb{R}^3 . Milnor lo risolve in questo modo: sia γ un piano, determinato da un vettore perpendicolare X di norma 1. Allora la funzione

$$h_\gamma(s) = C(s) \cdot X$$

è la proiezione di $C(s)$ lungo X e quindi esprime l'*altezza* dei punti della curva al di sopra (o sotto) il piano γ (vedi figura)



Supponiamo che questa funzione abbia un *unico massimo locale* M e sia m il minimo assoluto. Allora i due archi da m a M sono *strettamente crescenti* perché non ci sono altri massimi locali e quindi ogni piano parallelo a γ , compreso fra le altezze minima e massima, incontra ognuno di questi due archi in un unico punto. Unendo questi punti a due a due con un segmento (parallelo al piano γ !) si ottiene un disco di cui C è il bordo e C non è annodata.



Dunque basta dimostrare

Proposizione 3.4. *Sia C una curva chiusa. Se $\kappa(C) < 4\pi$ allora esiste un vettore X tale che la funzione $h_\gamma(s) = C(s) \cdot X$ ha un unico massimo locale.*

Chi sono i vettori X che determinano i piani? Sono i vettori di norma 1 e quindi corrispondono ai punti della sfera unitaria S^2 . Ne dobbiamo trovare uno con una proprietà speciale e allora li consideriamo tutti e poniamo

$$\mu_C(X) = \text{numero di massimi locali di } h_\gamma(s)$$

L'obiettivo è trovare un vettore X per cui $\mu_C(X) = 1$. La funzione $\mu_C(X)$ è definita per tutti i punti della sfera e la possiamo integrare e si ottiene la formula

$$\boxed{\int_{S^2} \mu_C(X) dA = 2\kappa(C)} \quad (1)$$

dove l'integrale è un integrale di superficie. Questa formula implica la Proposizione 3.4 e quindi il teorema. Infatti

$$\begin{aligned} \kappa(C) < 4\pi &\implies \int_{S^2} \mu_C(X) dA < 8\pi = 2 \int_{S^2} dA && \text{(2 volte l'area della sfera)} \\ &\implies \mu_C(X) < 2 \text{ per qualche } X \text{ in } S^2 \end{aligned}$$

perché se fosse $\mu_C(X) \geq 2$ per ogni X , l'integrando sarebbe sempre maggiore o uguale a 2 e quindi l'integrale sarebbe $\geq 8\pi$.

L'ultimo compito è quindi ricavare la formula (1). Il ragionamento è puramente geometrico e riguarda l'area dei settori sferici. Per i dettagli, leggere Spivak, dalla fine di pag. 34 a metà pag. 36.