Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 15

Alberto Albano

Nel corso di Analisi Matematica DUE sono state introdotte le 1-forme ed è stato studiato il loro comportamento rispetto all'operazione di integrazione sui cammini.

L'esempio tipico di 1-forma è il differenziale di una funzione: $\omega = df$, però non tutte le 1-forme sono di questo tipo e cioè non tutte le 1-forme sono *esatte*.

Lo studio dell'operazione $f \mapsto df$ porta alla domanda: se ω è una 1-forma, c'è una operazione analoga $\omega \mapsto d\omega$? Cosa significa? E che oggetto è $d\omega$?

La risposta è data dalla generalizzazione del concetto di 1-forma con l'introduzione delle k-forme. Questi oggetti dovrebbe essere ottenuti l'uno dall'altro mediante differenziazione e dovrebbero poter essere integrati su domini di dimensione k. Ci aspettiamo inoltre dei teoremi che legano i risultati degli integrali al comportamento rispetto alla differenziazione.

Tutta questa teoria culmina con il Teorema di Stokes, che vedremo verso la fine del corso. Questo teorema generalizza e unifica in un solo enunciato i vari teoremi noti dall'Analisi e dalla Fisica con il nome di teorema di Gauss-Green, teorema della divergenza e teorema del rotore (senza dimenticare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, che è la versione in dimensione 0 del teorema di Stokes!)

In questa lezione iniziamo lo studio delle forme differenziali, che occuperà la parte finale del corso. Per impostare bene lo studio abbiamo bisogno di alcune nozioni di algebra lineare che non fanno pare del programma dei corsi del primo anno e perciò cominciamo con l'introdurre i concetti di spazio vettoriale duale, di forme multilineari alternanti e di algebra esterna.

Dalla prossima lezione riprenderemo l'uso degli strumenti dell'Analisi Matematica (derivate e differenziali, gli integrali arriveranno più avanti).

1 Spazi vettoriali duali

In questo paragrafo rivediamo la definizione e le prime proprietà del duale di uno spazio vettoriale. Questo argomento è trattato nel corso di GEOMETRIA UNO, ma di solito risulta di difficile comprensione. È però essenziale in tutto quello che segue e quindi è importante avere chiaro questo concetto. Maggiori dettagli si trovano sull'Abbena-Fino-Gianella, Paragrafo 6.8.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{R}$. Trattiamo esplicitamente solo il caso reale per semplicità di esposizione e perché è il caso che interessa in geometria differenziale. Tutto quello che diremo (salvo menzione esplicita) vale più in generale per ogni campo K di caratteristica 0 ed è particolarmente interessante il caso $K = \mathbb{C}$.

Definizione 1.1. Il *duale* di V, indicato con V^* è

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ lineare}\},$$

l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V in $\mathbb{R}$.

Gli elementi di V^* sono chiamati *forme lineari* o *funzionali lineari*. Il nome *funzionale lineare* è tipico dell'Analisi, mentre il nome *forma lineare* è di solito usato in Algebra o in Geometria. In questo contesto, le parole *forma* o *funzionale* significano semplicemente che il codominio è il campo degli scalari.

È immediato dimostrare che V^* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite da:

$$\begin{aligned} (f+g)(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}), & \forall f, g \in V^*,\ \forall \mathbf{v} \in V \\ (\alpha \cdot f)(\mathbf{v}) &= \alpha \cdot f(\mathbf{v}), & \forall f \in V^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{v} \in V \end{aligned}$$

Per ogni base di V si può determinare una base di V^*, detta la *base duale*. Sia dunque $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V. Definiamo, per $i = 1, \ldots, n$, la forma lineare $f_i : V \to \mathbb{R}$ come

$$f_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$$

dove δ_{ij} è il *delta di Kronecker* che vale 1 per $i = j$ e 0 per $i \neq j$.

Le funzioni f_i sono ben definite perché sono assegnate sui vettori di una base. Le funzioni f_i hanno un nome ben noto: sono le *funzioni coordinate* rispetto alla base $\mathcal{B}$. Sia infatti $\mathbf{v} \in V$. Scrivendo il vettore rispetto alla base si ha

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

e per la linearità di f_i

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{v}) &= f_i(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) \\ &= a_1 f_i(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n f_i(\mathbf{v}_n) \\ &= a_i \end{aligned}$$

Quindi, fissata una base in V, si ottengono degli elementi particolari in V^*. L'importanza delle funzioni coordinate è data dalla

Proposizione 1.2. *$\mathcal{B}^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ è una base di V^*.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $f_1, \ldots, f_n$ sono generatori e che sono linearmente indipendenti.

Sia $f \in V^*$. Per $i = 1, \ldots, n$, poniamo $\lambda_i = f(\mathbf{v}_i)$. Per i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ della base si ha:

$$f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i = \lambda_1 f_1(\mathbf{v}_i) + \cdots + \lambda_n f_n(\mathbf{v}_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

perché $f_i(\mathbf{v}_i) = 1$ e gli altri sono nulli. Dunque le applicazioni lineari f e $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ coincidono sui vettori di una base e quindi sono la stessa applicazione lineare in V^*. Dunque ogni $f \in V^*$ è combinazione lineare delle f_i che quindi sono generatori.

Sia ora $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0 \in V^*$ e cioè l'applicazione lineare identicamente nulla. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$\alpha_1 f_1(\mathbf{v}) + \cdots + \alpha_n f_n(\mathbf{v}) = 0.$$

In particolare, calcolando sui vettori della base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ si ha

$$0 = \alpha_1 f_1(\mathbf{v}_i) + \cdots + \alpha_n f_n(\mathbf{v}_i) = \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ottenendo $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ e quindi $f_1, \ldots, f_n$ sono linearmente indipendenti. □

Poiché abbiamo trovato una base di V^* con n elementi ($n = \dim V$) abbiamo che $\dim V^* = n$. Dunque V e V^* hanno la stessa dimensione e sono quindi isomorfi. Un isomorfismo è dato, per esempio, facendo corrispondere gli elementi di una base di V con gli elementi della base duale di V^*.

Osservazione. Se V ha dimensione infinita la proposizione precedente non vale. Una base di V è costituita da infiniti elementi e si possono definire le forme f_i come prima. Essi risultano ancora linearmente indipendenti (stessa dimostrazione) ma la dimostrazione che sono generatori non vale più perché dovremmo fare una somma infinita. Dunque otteniamo solo che $\dim V \leq \dim V^*$ e si può dimostrare che la diseguaglianza è sempre stretta. Si ottiene perciò che se V ha dimensione infinita, V e V^* non sono mai isomorfi.

2 Algebra multilineare e algebra esterna

Nel corso di GEOMETRIA UNO sono state studiate le forme bilineari. Diamo ora la definizione generale di *forma multilineare* o, quando vogliamo essere specifici, di *forma k-lineare*. Le forme bilineari sono quelle che si ottengono nel caso $k = 2$:

Definizione 2.1. Una funzione $f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ volte}} \to \mathbb{R}$ si dice *forma k-lineare* se è lineare in ogni variabile, cioè se per ogni $i = 1, 2, \ldots, k$ si ha

$$f(\mathbf{v}_1, \ldots, \alpha\mathbf{v}_i + \beta\mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = \alpha f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) + \beta f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, $\mathbf{w}_i \in V$.

Quando consideriamo funzioni di più variabili, possiamo richiedere proprietà di simmetria o di antisimmetria. Per esempio, il caso di forme bilineari simmetriche è stato studiato a fondo in GEOMETRIA UNO: i prodotti scalari sono esempi di forme bilineari simmetriche. Per lo studio delle forme differenziali è invece importante studiare il caso *antisimmetrico* o *alternante*:

Definizione 2.2. Una forma k-lineare f si dice *alternante* se per ogni $1 \leq i < k$ e per ogni $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ si ha

$$f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k) = -f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

Quindi alternante significa che quando si scambiano due variabili (consecutive) il segno della funzione cambia.

Conosciamo già un esempio di forma k-lineare alternante: il determinante di una matrice $k \times k$, considerato come funzione delle *colonne*. Il determinante è lineare sulle colone e se si scambiano due colonne, il determinante cambia segno. Naturalmente, il determinante è anche una forma multilineare alternante se considerato come una funzione sulle righe della matrice.

Dal corso di ALGEBRA 1 sappiamo che le trasposizioni generano il gruppo simmetrico e cioè ogni permutazione si può scrivere come prodotto di trasposizioni. Si può anche dimostrare che ogni trasposizione è prodotto di trasposizioni *consecutive*:

Esercizio 2.3. Sia $1 \leq i < j \leq n$. Dimostrare che:

$$(i\ j) = (i\ i{+}1)(i{+}1\ i{+}2)\cdots(j{-}2\ j{-}1)(j{-}1\ j)(j{-}2\ j{-}1)\cdots(i{+}1\ i{+}2)(i\ i{+}1)$$

Per esempio: $(1\ 4) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(2\ 3)(1\ 2)$ (ricordare che le permutazioni si compongono da destra a sinistra).

Quindi ogni permutazione è prodotto delle trasposizioni $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $\ldots$, $(k-1\ k)$ e perciò f è alternante se e solo se per ogni permutazione $\sigma \in S_k$ si ha

$$f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = (-1)^\sigma f(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$$

dove il simbolo $(-1)^\sigma$ è il *segno* di σ e cioè

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

È chiaro che la somma di due forme k-lineari alternanti è ancora k-lineare alternante e anche ogni multiplo scalare di una forma k-lineare alternante lo è. Dunque le forme k-lineari alternanti formano uno spazio vettoriale e poniamo la seguente

Definizione 2.4. Lo spazio vettoriale

$$\bigwedge^k V^* = \{f : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R} \mid f \ k\text{-lineare e alternante}\}$$

si dice la *k-esima potenza esterna* di V^*.

Osservazione. Ci si potrebbe chiedere: esiste la potenza esterna di V (e non solo del duale)? La risposta è sì, ma la definizione di potenza esterna di uno spazio vettoriale in generale è più complicata della definizione che abbiamo appena dato per uno spazio vettoriale *duale*.

Il motivo è che non abbiamo nessuna informazione sugli elementi di uno spazio vettoriale arbitrario V, mentre gli elementi di uno spazio vettoriale duale sono *funzioni* e possiamo usare la loro speciale natura per definire i concetti che ci interessano.

Esempio 2.5. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$. Se indichiamo con $x_i : V \to \mathbb{R}$ la funzione coordinata i-esima, si ha che $\{x_1, x_2, x_3\}$ è una base di V^*.

Possiamo scrivere delle 2-forme alternanti nel modo seguente: per $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_2 = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, definiamo $\varphi_{ij} = x_i \wedge x_j$ come

$$\varphi_{12}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_1 \wedge x_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_{13}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_1 \wedge x_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_{23}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_2 \wedge x_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Le funzioni φ_{ij} sono 2-lineari e alternanti per le proprietà dei determinanti. Notiamo che $a_i = x_i(\mathbf{v}_1)$ e $b_i = x_i(\mathbf{v}_2)$ e quindi potremmo scrivere

$$\varphi_{ij}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_i \wedge x_j)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} x_i(\mathbf{v}_1) & x_i(\mathbf{v}_2) \\ x_j(\mathbf{v}_1) & x_j(\mathbf{v}_2) \end{pmatrix}$$

Più in generale, se h_1, $h_2 \in V^*$ sono due forme lineari, possiamo definire una forma bilineare alternante:

$$(h_1 \wedge h_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det (h_i(\mathbf{v}_j)), \qquad 1 \le i, j \le 2$$

e se abbiamo una terza forma lineare h_3 possiamo definire una forma trilineare alternante:

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \det (h_i(\mathbf{v}_j)), \qquad 1 \le i, j \le 3$$

Esercizio 2.6. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano h_1, h_2, h_3 e h_4 forme lineari su V. Dimostrare che $h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge h_4 = 0$, cioè

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge h_4)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = 0 \qquad \text{per ogni } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$$

Generalizziamo l'esempio precedente: sia V di dimensione n e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base. Sia $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale di V^*, cioè $e_i^* : V \to \mathbb{R}$ è definito da

$$e_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$$

Possiamo definire delle forme k-lineari alternanti nel seguente modo:

$$\left(e_{\alpha_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \det \left(e_{\alpha_i}^*(\mathbf{v}_j)\right), \qquad 1 \le i, j \le k$$

e, in generale, per $h_1, \dots, h_k \in V^*$

$$(h_1 \wedge \cdots \wedge h_k)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \det (h_i(\mathbf{v}_j)), \qquad 1 \le i, j \le k$$

Esercizio 2.7. Dimostrare che, per forme lineari $h_i \in V^*$:

1. $h_1 \wedge h_2 = -h_2 \wedge h_1$;
2. $h \wedge h = 0$;

3. $h_1 \wedge \cdots \wedge h_k = (-1)^\sigma h_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge h_{\sigma(k)}$.

Consideriamo di nuovo le forme k-lineari alternanti della forma $\left(e^*_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{\alpha_k}\right)$. Per l'esercizio precedente, a meno del segno possiamo sempre riordinare i termini in modo che $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$.

Lemma 2.8. *Sia* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ *e* $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k$. *Allora*

$$\left(e^*_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{\alpha_k}\right)(\mathbf{e}_{\beta_1}, \ldots, \mathbf{e}_{\beta_k}) = \delta_{\alpha_1\beta_1} \cdot \delta_{\alpha_2\beta_2} \cdot \cdots \cdot \delta_{\alpha_k\beta_k}$$

e cioè vale 1 *se* $\alpha_1 = \beta_1, \ \ldots, \ \alpha_k = \beta_k$ *e vale* 0 *altrimenti.*

Dimostrazione. Scriviamo le coordinate dei vettori $\mathbf{e}_i$ in *colonna*: ognuno di essi è quindi una colonna con 1 nella riga i e 0 altrimenti. Formiamo la matrice A di tipo $n \times k$ con le colonne date dai vettori $\mathbf{e}_{\beta_1}, \ldots, \mathbf{e}_{\beta_k}$. Per definizione, e come nell'Esempio 2.5, la funzione da calcolare è il determinante della sottomatrice B di A che si ottiene prendendo le righe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$: la riga α_i ha proprio le coordinate α_i-esime e quindi ha i valori della funzione $e^*_{\alpha_i}$.

Se esiste i tale che $\alpha_i \neq \beta_i$, allora la riga i-esima della sottomatrice B è tutta nulla e quindi il determinante è 0.

Se invece $\alpha_1 = \beta_1, \ \ldots, \ \alpha_k = \beta_k$ allora la sottomatrice B è la matrice identità di ordine k e quindi il determinante è 1. Le diseguaglianze sugli α_i e β_j assicurano che gli 1 della matrice B sono sulla diagonale principale. Se l'ordine non fosse crescente, il determinante sarebbe sempre diverso da 0, ma potrebbe essere 1 oppure -1. □

Possiamo adesso dimostrare il primo risultato sulle potenze esterne:

Proposizione 2.9. *L'insieme*

$$\{e^*_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{\alpha_k}\}, \qquad \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k, \quad \alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

è una base di $\bigwedge^k V^*$ *e quindi* $\dim \bigwedge^k V^* = \binom{n}{k}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che gli elementi indicati sono linearmente indipendenti. Sia infatti

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \left(e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}\right) = 0.$$

Valutando sui vettori $(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_k})$ con $j_1 < \cdots < j_k$, per il Lemma precedente si ottiene

$$\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \left(e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}\right)\right)(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_k}) = a_{j_1 \ldots j_k} = 0$$

e quindi tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli.

Dimostriamo ora che sono generatori: sia φ una forma k-lineare alternante e poniamo, per ogni $j_1 < \cdots < j_k$

$$b_{j_1 \ldots j_k} = \varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_k})$$

Si dimostra allora (esercizio!) che

$$\varphi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} b_{i_1 \ldots i_k} \left(e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}\right)$$

e quindi gli elementi indicati generano tutto $\bigwedge^k V^*$. □

Otteniamo quindi che, per $\dim V = n$, si ha $\bigwedge^k V^* = 0$ per $k > n$ (ricordare l'Esercizio 2.6). Poniamo per convenzione $\bigwedge^0 V^* = \mathbb{R}$ e scriviamo

$$\bigwedge^* V^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k V^* = \mathbb{R} \oplus V^* \oplus \bigwedge^2 V^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n V^*$$

$\bigwedge^* V^*$ è uno spazio vettoriale, in quanto somma diretta di spazi vettoriali. Abbiamo inoltre visto che c'è una "moltiplicazione" che permette di ottenere elementi di $\bigwedge^k V^*$ a partire da elementi di $V^* = \bigwedge^1 V^*$. Questa moltiplicazione si può estendere a tutto $\bigwedge^* V^*$ nel modo seguente: se $\omega \in \bigwedge^k V^*$ e $\eta \in \bigwedge^s V^*$ possiamo scrivere

$$\omega = \sum_I a_I e_I^*, \qquad \eta = \sum_J b_J e_J^*$$

dove usiamo la notazione con multi-indici: per $I = (i_1, \ldots, i_k)$ un multi-indice di lunghezza $|I| = k$, poniamo $e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$. Definiamo allora

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} a_I b_J (e_I^* \wedge e_J^*)$$

Questa operazione, estesa per linearità a tutte le forme, si chiama *moltiplicazione esterna*. Notiamo in particolare che il significato di $(e_I^* \wedge e_J^*)$ è, per definizione,

$$e_I^* \wedge e_J^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_s}^*$$

Osserviamo anche che i multi-indici sono di solito scritti in ordine crescente, ma in $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_s}^*$ gli indici non sono necessariamente crescenti. Per avere la scrittura standard, occorre permutare gli indici che compaiono in I e J, cambiando il segno in maniera opportuna.

La proposizione seguente riassume le principali proprietà della moltiplicazione esterna.

Proposizione 2.10. *Siano $\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\eta \in \bigwedge^s V^*$, $\theta \in \bigwedge^r V^*$.*

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
2. $\omega \wedge \eta = (-1)^{ks} (\eta \wedge \omega)$.

Dimostrazione.

1. Esercizio.
2. Per linearità, possiamo supporre che $\omega = a\, e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ e $\eta = b\, e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_s}^*$. Allora

   $$\omega \wedge \eta = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_s}^*$$

   Per ottenere $\eta \wedge \omega$ dobbiamo portare tutti i termini $e_{j_l}^*$ davanti ai termini $e_{i_m}^*$. Per portare $e_{j_1}^*$ in prima posizione, dobbiamo fare k scambi e quindi il segno cambia k volte. Dunque:

   $$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_s}^* = (-1)^k e_{j_1}^* \wedge e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_s}^*$$

   Portando adesso al loro posto gli altri $e_{j_m}^*$, per ognuno di essi il segno cambia k volte. Poiché in totale ci sono s termini da spostare, il segno cambia ks volte e quindi si ha il fattore scritto nella formula.

□

Ricordiamo alcune definizioni di algebra. Queste definizioni non sono essenziali nel seguito, ma facilitano la nomenclatura.

Definizione 2.11. Sia A un anello. Il *centro* $C(A)$ di A è l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli elementi di A:

$$C(A) = \{c \in A \mid ca = ac \ \forall\, a \in A\}$$

Il centro di un anello è un sottoanello. A è un anello commutativo se e solo se $A = C(A)$.

Esempio 2.12. Se $A = M_n(\mathbb{R})$, l'anello delle matrici reali quadrate $n \times n$, il centro $C(A)$ è il sottoanello delle matrici *scalari*, cioè delle matrici della forma $\lambda\, \mathrm{I}_n$, multiple della matrice identità.

Definizione 2.13. Un *anello graduato* A è un anello tale che

$$A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k$$

dove gli A_k sono gruppi abeliani e la moltiplicazione è tale che

$$A_h \cdot A_k \subseteq A_{h+k}$$

Gli elementi di A_k si dicono *elementi omogenei di grado* k.

Esempio 2.14. $A = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, l'anello dei polinomi in n indeterminate a ceofficienti reali. $A_k =$ polinomi omogenei di grado k. In particolare, $A_0 = \mathbb{R}$.

Definizione 2.15. Una $\mathbb{R}$-*algebra* A è un anello A che contiene (una copia isomorfa di) $\mathbb{R}$ nel suo centro. L'anello A risulta in modo naturale uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: la moltiplicazione per scalari è semplicemente la moltiplicazione di un elemento di $\mathbb{R} \subset A$ per un elemento di A.

Esempio 2.16. Conosciamo già alcuni esempi di $\mathbb{R}$-algebre.

1. $M_n(\mathbb{R})$: il centro di $M_n(\mathbb{R})$ è il sottoanello delle matrici scalari che è isomorfo a $\mathbb{R}$. $M_n(\mathbb{R})$ è detta l'*algebra delle matrici.*

2. $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ è una $\mathbb{R}$-algebra, detta l'*algebra (o anello) dei polinomi.*

3. $\bigwedge^* V^*$, dove V è uno spazio vettoriale reale, è una $\mathbb{R}$-algebra, detta l'*algebra esterna di* V^*.

L'algebra $M_n(\mathbb{R})$ non è commutativa, mentre $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ lo è. Anche l'algebra esterna non è commutativa, però c'è una regolarità nel risultato di invertire i fattori di un prodotto, dovuta ai gradi dei fattori.

Definizione 2.17. Sia $A = \oplus_{k \geq 0} A_k$ un'algebra graduata. A si dice *(anti)commutativa graduata* se

$$a \cdot b = (-1)^{ks} b \cdot a, \qquad \forall\, a \in A_k, \forall\, b \in A_s$$

Quindi l'algebra esterna è un'algebra (anti)commutativa graduata. La ragione del nome è che A è in parte commutativa e in parte anticommutativa. Dire *commutativa graduata* comprende questi due comportamenti.