Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

# Esercizi per l'esame
# Appelli di giugno/luglio/settembre 2020 - versione 2

Uno degli esercizi seguenti verrà chiesto all'esame. Per risolvere alcuni punti degli esercizi è necessario utilizzare il risultato di punti precedenti. Potete farlo, anche se non li avete risolti.

Cercate di trovare una dimostrazione completa. Se non riuscite, cercate di avere almeno una traccia o un'idea di come affrontare il problema. Se avete bisogno di chiarimenti sul testo, contattatemi (non aspettate il giorno prima dell'esame...). Non ci saranno consulenze o suggerimenti su questi esercizi.

## 1 Curve nello spazio

**Esercizio 1.1.** Sia $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Dimostrare che

$$\frac{d^3}{ds}\alpha = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}$$

**Esercizio 1.2.** Sia $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Per ogni $r \in \mathbb{R}$ si consideri la curva

$$\alpha_r(s) := \alpha(s) + r\mathbf{b}(s)$$

dove $\mathbf{b}(s)$ è il vettore binormale di $\alpha$. Dimostrare che

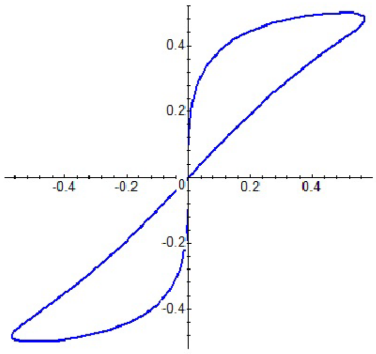
a. $\alpha_r$ è sempre una curva regolare. Calcolare la curvatura di $\alpha_r$ e determinare una condizione sufficiente su $\alpha$ affinché $\alpha_r$ sia biregolare

b. $\alpha$ è piana se e solo se il vettore binormale a $\alpha_r$ è $\pm\mathbf{b}$ (sotto l'ipotesi $\alpha_r$ biregolare)

**Esercizio 1.3.** Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \left( \frac{t}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^2} \right)$$

Dimostrare che è una parametrizzazione regolare iniettiva ma non un omeomorfismo con l'immagine.




**Esercizio 1.4.** Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \left( 2\sqrt{2}\, t - \sin t, 2\sqrt{2} \sin t + t, 3 \cos t \right)$$

Dimostrare che la curva definita da $\alpha$ è un'elica circolare.

**Esercizio 1.5.** Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza e supponiamo che $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. esistono due costanti $c, d \in \mathbb{R}$ non entrambe nulle tali che $ck + d\tau \equiv 0$
2. esiste un versore costante non nullo $\mathbf{v}_0$ tale che $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v}_0 \rangle$ è costante
3. esiste un piano $H$ vettoriale tale che $\mathbf{n}(s) \in H$ per ogni $s \in I$. Questa condizione si può esprimere in modo equivalente come: esiste un vettore non nullo costante $\mathbf{v}$ tale che $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v} \rangle \equiv 0$.
4. esiste un versore costante non nullo $\mathbf{v}_0$ tale che $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{v}_0 \rangle$ è costante
5. la curva $\alpha$ ha una parametrizzazione della forma

   $$\alpha(s) = \eta(s) + (s - s_0)\,\mathbf{v}$$

   dove $\eta$ è una curva piana parametrizzata per arcolunghezza e $\mathbf{v}$ è un vettore costante ortogonale al piano contenente il sostegno di $\eta$

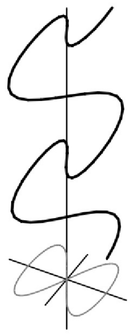
Suggerimento: dimostrare le catene di implicazioni

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (1) \qquad \text{e} \qquad (2) \implies (5) \implies (1)$$

L'esercizio deve essere svolto completamente. Come domanda d'esame, tutte le implicazioni potranno essere chieste, ma certamente non tutte alla stessa persona.

Una curva $\alpha$ soddisfacente una qualsiasi di queste condizioni equivalenti è detta elica (generalizzata) (vedi figura). Esprimere infine curvatura, torsione e triedro di Frenet di $\alpha$ in funzione della curvatura e del triedro di Frenet di $\eta$.

***Osservazione***. L'ipotesi sulla torsione forse non è necessaria. È semplice vedere che tutte le condizioni tranne la (4) implicano che la torsione non è mai nulla. Forse si può anche dimostrare che la (4) implica che la torsione non è mai nulla, ma non ci sono riuscito. L'ipotesi sulla torsione si usa solo nella dimostrazione di (4) $\implies$ (1) e la rende piuttosto semplice.



**Esercizio 1.6.** Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza con curvatura $k$ e torsione $\tau$. Dimostrare che la curvatura $k_1$ dell'indicatrice delle tangenti di $\alpha$ è tale che

$$k_1^2 = 1 + \frac{\tau^2}{k^2}$$

# 2 Superfici differenziabili

**Esercizio 2.1.** Sia $S$ la superficie nello spazio di equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

(iperboloide a una falda)

1. dimostrare che per ogni numero reale $t$ la retta $\ell_t$ di equazioni cartesiane
$$(x - z)\cos t = (1 - y)\sin t, \quad (x + z)\sin t = (1 + y)\cos t$$
è contenuta nella superficie $S$
2. dimostrare ogni punto di $S$ è contenuto in una e una sola delle rette $\ell_t$
3. ottenere da questo una parametrizzazione di $S$

Nota: 1. è facile, 2. è più difficile. Anche se non riuscite a svolgere 1. e/o 2., fate almeno il punto 3. (naturalmente, supponendo veri 1. e 2.). Osservate anche che conosciamo già una parametrizzazione di $S$ (Lezione 16, Esercizio 4.$b$). Usando questa osservazione, si ottiene la stessa parametrizzazione o una diversa?

**Esercizio 2.2.** Sia $\mathbf{x} : U \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare. Dimostrare che

1. vale la diseguaglianza $H^2 \geq K$ in ogni punto $p \in S$
2. per quali punti di $S$ vale l'uguaglianza?

**Esercizio 2.3.** Consideriamo gli insiemi

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 z^2 = 1\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$$

Dimostrare che $S_1$ e $S_2$ sono superfici regolari. Dimostrare inoltre che $S_2$ è compatta, mentre $S_1$ non è compatta.

**Esercizio 2.4.** Costruire un diffeomorfismo fra il cilindro circolare retto di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e il piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine.

**Esercizio 2.5.** Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la superficie

$$S_{a,b} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax^2 + by^2\}$$

è isometrica a un piano.

**Esercizio 2.6.** Dimostrare che le superfici date dalle parametrizzazioni

$$S_1 : \quad \mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = \log u \end{cases}$$

e

$$S_2 : \quad \mathbf{y}(u, v) = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases}$$

hanno curvatura Gaussiana uguale nei punti corrispondenti $\mathbf{x}(u, v)$ e $\mathbf{y}(u, v)$, ma la funzione $\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1} : S_1 \to S_2$ non è una isometria.

Questo mostra che una funzione che lascia invariata la curvatura non è necessariamente una isometria, e quindi il "viceversa" del Theorema Egregium non vale.

# 3 Forme differenziali

**Esercizio 3.1.** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile, data in coordinate da

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$$

e cioè le componenti della funzione $f$ sono $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Sia $\omega = dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n$. Dimostrare che

$$f^*\omega = (\det df)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

dove $df$ è il differenziale di $f$.

**Esercizio 3.2.** Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Si dice che $X$ *proviene localmente da un potenziale* se per ogni $p \in U$ esiste un intorno $p \in V \subseteq U$ e una funzione differenziabile $g : V \to \mathbb{R}$ (che viene detta *potenziale*) take che $X = \operatorname{grad} g$

1. sia $X$ un campo vettoriale come sopra e sia $\omega = X^\flat$ la 1-forma corrispondente. Ricordiamo che per definizione, $\omega$ agisce sui vettori tangenti come
$$\omega_p(\mathbf{u}) = \langle X(p), \mathbf{u}\rangle, \quad \forall\, \mathbf{u} \in T_pU = \mathbb{R}^n$$
Dimostrare che $X$ proviene localmente da un potenziale se e solo se $d\omega = 0$. Suggerimento: usare il lemma di Poincaré.

2. Dimostrare che $X$ proviene localmente da un potenziale se e solo se $\operatorname{rot} X = 0$

3. sia $X$ il campo elettrico
$$X(p) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,(x,y,z), \quad p \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$$
Dimostrare che $X$ proviene localmente dal potenziale
$$g(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + c$$
e che $\Delta g = 0$ (il Laplaciano della funzione $g$).

**Esercizio 3.3.** Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ due aperti e sia $f : U \to V$ una funzione differenziabile invertibile con inversa $f^{-1} : V \to U$ ancora differenziabile. Dimostrare che se ogni forma chiusa $\omega \in \Omega^k(U)$ è esatta, allora lo stesso è vero per le forme chiuse in $\Omega^k(V)$.

Suggerimento: sia $\omega \in \Omega^k(V)$ chiusa. Allora $f^*\omega$ è chiusa in $U$ (perché?) e quindi esatta: $f^*\omega = d\eta$. Usare la forma $\eta$ per dimostrare che $\omega$ è esatta.

**Esercizio 3.4.** In $\mathbb{R}^3$ con coordinate $(x_1, x_2, x_3)$ definiamo la forma
$$\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - (x_1 + x_2)\, dx_1 \wedge dx_3 + (x_3 - x_2)\, dx_1 \wedge dx_2$$

1. calcolare $d\omega$ e $*\omega$;

2. calcolare $d(*\omega)$ e $\omega \wedge *\omega$;

3. Sia $S^2$ la sfera di centro l'origine e raggio $R$. Calcolare $\displaystyle\int_{S^2} \omega$.