Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 19

Alberto Albano

In questa lezione svolgiamo gran parte degli esercizi sulle forme differenziali presenti nel Capitolo 1 del do Carmo, *Differential Forms and Applications.*

Durante il corso degli esercizi introdurremo delle definizioni e dei concetti che saranno utili nella formulazione del teorema di Stokes.

1 Esercizi, parte 1

Cominciamo con gli esercizi più semplici. Non manteniamo la numerazione del do Carmo, perché salteremo alcuni esercizi e ne faremo altri non presenti sul libro.

Come sempre, è una buona idea provare a fare gli esercizi che qui non sono svolti. Inoltre, provate a fare l'esercizio prima di leggere la soluzione.

Esercizio 1.1. Dimostrare che una forma bilineare $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è alternante se e solo se $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Soluzione. Ricordiamo che per definizione (Lezione 15, Definizione 2.2), una forma bilineare φ è alternante se

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \text{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$$

Se φ è alternante, basta porre $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ e si ha $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ e quindi $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$.

Viceversa, supponiamo la condizione soddisfatta e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Per la bilinearità si può srivere

$$0 = \varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w})$$

Per ipotesi $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ e quindi si ottiene

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$$

e cioè φ è alternante.

Osservazione. Abbiamo usato senza dirlo esplicitamente il fatto (ovvio) che per un numero reale r si ha: $r = -r \implies r = 0$.

Consideriamo ora uno spazio vettoriale V su un campo K qualunque e una forma bilineare $\varphi : V \times V \to K$. Possiamo considerare le due condizioni

(1) $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$

Per il campo $\mathbb{R}$ abbiamo appena visto che (1) $\iff$ (2). Per un campo K arbitrario, le due condizioni non sono equivalenti. Rispondere alle seguenti domande:

- Una delle implicazioni è vera per ogni campo K. Quale?
- Quali ipotesi bisogna fare sul campo K affinché le due condizioni siano equivalenti?

Esercizio. L'esercizio 2) del do Carmo è l'enunciato che abbiamo dimostrato come Lemma 2.8 nella Lezione 15 e quindi non lo ripetiamo qui. Però questo lemma si usa nella risoluzione del prossimo esercizio, perciò andate a ripassarlo.

Esercizio 1.2. Date delle 1-forme $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_k \in V^*$ abbiamo dato due definizioni di prodotto esterno, una subito dopo l'Esempio 2.6 della Lezione 15 e l'altra nella definizione generale di prodotto esterno di forme (Lezione 15, metà di pag. 7). Dimostrare che le due definizioni coincidono.

Soluzione. La prima definizione è

$$(h_1 \wedge \cdots \wedge h_k)\,(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \det\left(h_i(\mathbf{v}_j)\right), \qquad 1 \leq i, j \leq k$$

per vettori $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_k \in V$. Fissiamo una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di V e sia $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ la base duale di V^*, cioè $dx_i : V \to \mathbb{R}$ è definito da

$$dx_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$$

Allora possiamo scrivere le 1-forme in termini della base duale come

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\, dx_j$$

dove $h_{ij} \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti (scalari). Usando la multilinarità delle forme, basta dimostrare che le due definizioni coincidono sui vettori di una base e quindi dobbiamo calcolare

$$(h_1 \wedge \cdots \wedge h_k)\,(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k})$$

e vedere che le due definizione danno lo stesso numero.

Per maggiore chiarezza, facciamo prima il caso $k = 2$. Questo ci farà capire come organizzare il calcolo in generale. L'unica difficoltà è nella scelta di notazioni non troppo confuse e quindi cercheremo di scegliere i nomi degli indici in modo semplice.

Scriviamo esplicitamente le forme h_1 e h_2:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{11}\, dx_1 + h_{12}\, dx_2 + \cdots + h_{1n}\, dx_n \\ h_2 &= h_{21}\, dx_1 + h_{22}\, dx_2 + \cdots + h_{2n}\, dx_n \end{aligned}$$

Prendiamo due vettori della base $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$, con $i < j$. Per prima cosa osserviamo che

$$h_1(\mathbf{e}_i) = h_{1i}, \qquad h_1(\mathbf{e}_j) = h_{1j}$$

e lo stesso vale per h_2. Dunque, calcolando con la prima definizione si ha

$$(h_1 \wedge h_2)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \det \begin{pmatrix} h_{1i} & h_{1j} \\ h_{2i} & h_{2j} \end{pmatrix}$$

La seconda definizione esprime il prodotto di forme come combinazione lineare delle forme della base dx_I, dove I è un multi-indice di lunghezza k. In questo caso, le forme della base di $\bigwedge^2 V^*$ sono le 2-forme del tipo $dx_\alpha \wedge dx_\beta$. Calcoliamo il prodotto, ricordando che è definito per linearità e quindi si calcola con le regole usuale della proprietà distributiva, rispettando le regole delle anticommutatività:

$$dx_\alpha \wedge dx_\alpha = 0, \qquad dx_\alpha \wedge dx_\beta = -dx_\beta \wedge dx_\alpha$$

Si ha:

$$\begin{aligned} h_1 \wedge h_2 &= (h_{11}\, dx_1 + \cdots + h_{1n}\, dx_n) \wedge (h_{21}\, dx_1 + \cdots + h_{2n}\, dx_n) \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} (h_{1\alpha} h_{2\beta})\; dx_\alpha \wedge dx_\beta \\ &= \sum_{\alpha<\beta} (h_{1\alpha} h_{2\beta} - h_{1\beta} h_{2\alpha})\; dx_\alpha \wedge dx_\beta \end{aligned}$$

dove nell'ultima somma non compaiono i termini con $\alpha = \beta$ e abbiamo raccolto insieme i due termini multipli di $dx_\alpha \wedge dx_\beta$, usando le regole di anticommutatività. Applicando ora questa 2-forma alla coppia di vettori $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ vediamo che, per il Lemma 2.8 nella Lezione 15

$$(dx_\alpha \wedge dx_\beta)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i\alpha} \cdot \delta_{j\beta}$$

e quindi tutti i termini della somma si annullano tranne il termine $dx_i \wedge dx_j$ e si ottiene

$$(h_1 \wedge h_2)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = h_{1i} h_{2j} - h_{1j} h_{2i}$$

che è proprio il determinante scritto sopra.

Facciamo ora il calcolo con $k = 3$: consideriamo le forme h_1, h_2, h_3 e tre vettori $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_k$ con $i < j < k$. La prima definizione dà

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \det \begin{pmatrix} h_{1i} & h_{1j} & h_{1k} \\ h_{2i} & h_{2j} & h_{2k} \\ h_{3i} & h_{3j} & h_{3k} \end{pmatrix}$$

Moltiplichiamo ora le tre forme, usando le stesse regole di anticommutatività viste prima:

$$h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 = \sum_{\alpha<\beta<\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}\, dx_\alpha \wedge dx_\beta \wedge dx_\gamma$$

Per prima cosa osserviamo come prima che, sempre per il Lemma 2.8,

$$(dx_\alpha \wedge dx_\beta \wedge dx_\gamma)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{i\alpha} \cdot \delta_{j\beta} \cdot \delta_{k\gamma}$$

e quindi tutti i termini della somma si annullano tranne il termine $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ e quindi si ottiene

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = H_{ijk}$$

Il coefficiente H_{ijk} si ottiene raccogliendo tutti i termini che contengono $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ in un qualche ordine, non solo quello strettamente crescente. Questi termini corrispondono a tutte le permutazioni possibili dei tre indici (i, j, h) e sono quindi 6 e ognuno ha come coefficiente scalare il prodotto di tre coefficienti delle forme h_1, h_2, h_3. Usando le regole di anticommutatività per riportare i termini dx nell'ordine corretto, si vede che c'è da considerare il segno della permutazione e quindi si ha

$$H_{ijk} = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma h_{1\sigma(i)} h_{2\sigma(j)} h_{3\sigma(k)}$$

che è la definizione di determinante della matrice considerata prima.

È chiaro (speriamo!) che la dimostrazione nel caso $k = 3$ vale per k qualunque: scrivendo in maniera opportuna gli indici dei vettori della base a cui si applica il prodotto delle forme si ottiene che l'unico coefficiente non nullo è il determinante che appare nela prima definizione.

Naturalmente, tutti i coefficienti del prodotto esterno sono determinanti: se $\dim V = n$ e le forme che si stanno moltiplicando sono k, i coefficienti del prodotto delle forme sono i determinanti dei minori di ordine k della matrice (h_{ij}) formata dai coefficienti delle forme rispetto alla base $dx_1, \ldots, dx_n$ dello spazio duale V^*

Esercizio 1.3. Sia ω una k-forma. Dimostrare che

(1) se ω è una k-forma e k è dispari, allora $\omega \wedge \omega = 0$;

(2) dare un esempio di k-forma ω (con $k > 0$) per cui $\omega \wedge \omega \neq 0$.

Soluzione.
(1) Questa è una semplice conseguenza del punto 2 Proposizione 2.10 della Lezione 15: per una forma ω di grado k e una forma η di grado s vale

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{ks}(\eta \wedge \omega)$$

e quindi $\omega \wedge \omega = (-1)^{k^2} \omega \wedge \omega$. Se k è dispari, anche k^2 è dispari e quindi $\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$ e perciò $\omega \wedge \omega = 0$
(2) Proviamo con $k = 2$: se ω è una 2-forma, allora $\omega \wedge \omega$ è una 4-forma e quindi dobbiamo prendere $n = \dim V \geq 4$ per avere 4-forme non nulle. Se ω è un monomio, il prodotto esterno con se stessa ha certamente dx_i ripetuti e quindi è nulla. Consideriamo allora una somma di almeno due termini:

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

Calcolando (esercizio!!)

$$\omega \wedge \omega = 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \neq 0$$

Esercizio 1.4. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le forme differenziali

$$\varphi = x\, dx - y\, dy, \qquad \psi = z\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz, \qquad \theta = z\, dy$$

Calcolare $\varphi \wedge \psi$, $\theta \wedge \varphi \wedge \psi$, $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$.

Soluzione. Basta usare le definizione e le regole di anticommutatività per raccogliere e semplificare le risposte.

$$\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &= (x\,dx - y\,dy) \wedge (z\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz) \\
&= xz\,dx \wedge dx \wedge dy + x^2\,dx \wedge dy \wedge dz - yz\,dy \wedge dx \wedge dy - xy\,dy \wedge dy \wedge dz \\
&= \boxed{x^2\,dx \wedge dy \wedge dz}
\end{aligned}$$

$\theta \wedge \varphi \wedge \psi = \boxed{0}$ perché è una 4-forma su $\mathbb{R}^3$ e quindi è nulla.

$d\varphi = d\,(x\,dx - y\,dy) = dx \wedge dx - dy \wedge dy = \boxed{0}$

$d\psi = d\,(z\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz) = dz \wedge dx \wedge dy + dx \wedge dy \wedge dz = \boxed{2\,dx \wedge dy \wedge dz}$

$d\theta = d\,(z\,dy) = dz \wedge dy = \boxed{-dy \wedge dz}$

dove nell'ultima cambiamo l'ordine nella risposta finale perché le forme si scrivono sempre con i differenziali in ordine crescente (in questo caso l'ordine alfabetico x, y, z).

Esercizio 1.5. Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile. Supponiamo che $n < m$ e sia ω una k-forma su $\mathbb{R}^m$ con $k > n$. Dimostrare che $f^*\omega = 0$.

Soluzione. Il pullback di forme rispetta il grado e quindi, se ω è una k-forma su $\mathbb{R}^m$, anche $f^*\omega$ è una k-forma su $\mathbb{R}^n$. Poiché $k > n$, la forma $f^*\omega$ è automaticamente nulla, come tutte le forme di grado strettamente maggiore della dimensione dello spazio su cui sono definite.

Esercizio 1.6. Sia ω la 2-forma su $\mathbb{R}^{2n}$ data da

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

Calcolare il prodotto $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ ripetuto n-volte.
Suggerimento: ω^n è una $2n$-forma e quindi $\omega^n = A \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$. Determinare il coefficiente A.

Soluzione. Scriviamo, per brevità

$$a_i = dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\omega^n &= (a_1 + a_2 + \ldots a_n)^n \\
&= (a_1 + a_2 + \ldots a_n) \wedge (a_1 + a_2 + \ldots a_n) \wedge \cdots \wedge (a_1 + a_2 + \ldots a_n)
\end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il prodotto: è come moltiplicare polinomi e quindi dobbiamo scegliere un addendo da ogni parentesi. Osserviamo che se abbiamo un fattore ripetuto (scegliamo lo stesso addendo da due parentesi diverse), il prodotto è automaticamente nullo, perché ci sono dei differenziali ripetuti. Dunque gli unici addendi che possono essere non nulli sono quelli formati da

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$$

in tutti gli ordini possibili e cioè

$$\omega^n = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(n)}$$

Poiché tutti i termini a_i sono delle 2-forme, quando si scambia l'ordine in cui compaiono i fattori, il segno non cambia e gli addendi di questa somma sono tutti uguali. Poiché ci sono $n!$ permutazioni su n elementi, si ottiene

$$\omega^n = n!\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$$

Esercizio. L'esercizio 8) del do Carmo è uno degli esercizi da svolgere per l'esame e quindi non lo risolviamo qui.

Esercizio 1.7. Sia ν la n-forma alternante definita su $\mathbb{R}^n$ da

$$\nu\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$$

dove $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che

(1) se $\mathbf{v}_i = \sum_j a_{ij}\mathbf{e}_j$, $i = 1, \ldots, n$ sono n vettori, allora

$$\nu(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det(a_{ij}) = \mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

dove $\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è il volume n-dimensionale del parellelepipedo generato dai vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ (cosa succede quando sono linearmente dipendenti?). La forma ν è detta *elemento di volume* di $\mathbb{R}^n$;

(2) $\nu = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$;

(3) che relazione c'è fra ν e la forma ω^n dell'esercizio precedente?

Soluzione. Conviene risolvere nell'ordine (2), (1), (3).
(2) Questo è immediato: sono entrambe n-forme e poiché sappiamo che lo spazio vettoriale $\bigwedge^n(\mathbb{R}^n)^*$ a cui appartengono entrambe ha dimensione 1 (Proposizione 2.9, Lezione 15), sono l'una multipla dell'altra. Sappiamo che

$$(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$$

(per esempio, usando il Lemma 2.8, Lezione 15) e quindi sono uguali.
(1) Dall'Esercizio 1.2 sappiamo che possiamo calcolare il prodotto wedge di 1-forme tramite i determinanti. Si ha

$$\begin{aligned}\nu(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) &= (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)\,(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ &= \det\left(dx_i(\mathbf{v}_j)\right)\end{aligned}$$

per linearità

$$dx_i(\mathbf{v}_j) = dx_i(a_{j1}\mathbf{e}_1 + \ldots a_{jn}\mathbf{e}_n) = a_{ji}$$

da cui la tesi (il determinante non cambia trasponendo).
(3) Dal calcolo fatto prima,

$$\omega^n = n!\,\nu$$

2 Operatori differenziali

Torniamo a fare un po' di teoria, introducendo un importante endomorfismo sullo spazio delle forme, l'*operatore $*$ di Hodge* (si legge "operatore star di Hodge"). Tramite lo $*$ di Hodge definiremo gli oggetti classici del calcolo differenziale in più variabili, il *gradiente*, la *divergenza* e il *rotore*, più qualcun altro come il *Laplaciano*.

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ e le corrispondenti coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$. Sappiamo che per un punto $p \in \mathbb{R}^n$ i vettori $\{\mathbf{e}_1|_p, \ldots, \mathbf{e}_n|_p\}$ sono una base dello spazio tangente $T_p\mathbb{R}^n$ e i differenziali $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ sono una base dello spazio cotangente $T_p^*\mathbb{R}^n$.

Sia ω una k-forma differenziale definita sull'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\omega = \sum_I a_I \, dx_I, \qquad \varphi = \sum_J b_J \, dx_J$$

dove i coefficienti a_I sono funzioni differenziabiil definite sull'aperto U.

2.1 Lo $*$ di Hodge

Definizione 2.1. L'*operatore $*$ di Hodge* è definito ponendo

$$*(dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k}) = (-1)^\sigma (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-k}})$$

dove $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_{n-k}$, σ è la permutazione

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_k & j_1 & \ldots & j_{n-k} \end{array} \right)$$

e $(-1)^\sigma$ indica il *segno* di σ e cioè

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

e poi estendendo per linearità ad una funzione $* : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$. (Attenzione: la linearità va intesa come $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$-moduli e cioè, se f è una funzione e ω una k-forma, si ha $*(f \cdot \omega) = f \cdot (*\omega)$).

Per prima cosa osserviamo che se ω è una k-forma, allora $*\omega$ è una $(n-k)$-forma e quindi l'operatore $*$ dipende non solo dal grado della forma ma anche dalla dimensione dello spazio ambiente. Vediamo adesso alcuni esempi.

Esempio 2.2. Cominciamo con le 1-forme. Siano dx_1, $dx_2 \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$*dx_1 = dx_2 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n, \qquad *dx_2 = -dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Infatti nel primo caso la permutazione è

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{array} \right)$$

mentre nel secondo caso è

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 1 & 3 & \ldots & n \end{array} \right)$$

In generale

$$*dx_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

dove $\widehat{dx_i}$ significa che il termine dx_i non è presente. La permutazione in questo caso è

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ i & 1 & 2 & \dots & i-2 & i-1 & i+1 & \dots & n \end{array} \right)$$

e ci vogliono $i-1$ scambi per portare la permutazione nell'identità.

Esempio 2.3. Riprendiamo le forme dell'Esercizio 1.4 in $\mathbb{R}^3$

$$\varphi = x\,dx - y\,dy, \qquad \theta = z\,dy$$

Calcoliamo per esempio $*\varphi$, $d(*\varphi)$, $*d\varphi$. Si ha, usando l'ordinamento delle variabili (x, y, z)

$$*dx = dy \wedge dz, \qquad *dy = -dx \wedge dz, \qquad *dz = dx \wedge dy$$

e dunque

$$\begin{aligned} *\varphi &= x\,dy \wedge dz + y\,dx \wedge dz \\ d(*\varphi) &= dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dx \wedge dz = 0 \\ *d\varphi &= *0 = 0 \end{aligned}$$

Le ultime due righe sembrano indicare che d e $*$ commutano. Questo non è vero in generale come si vede da

$$\begin{aligned} *\theta = -z\,dx \wedge dz &\implies d(*\theta) = 0 \\ d\theta = dz \wedge dy &\implies *d\theta = -dx \end{aligned}$$

In effetti, se ω è una 1-forma, allora $*\omega$ è una $(n-1)$-forma e quindi $d(*\omega)$ è una n-forma, mentre $d\omega$ è una 2-forma e quindi $*d\omega$ è una $(n-2)$-forma. Vediamo quindi che l'unico modo in cui possono essere uguali è se sono entrambe nulle (così non vediamo più il grado).

Esempio 2.4. L'operatore $*$ è lineare per definizione e cioè, per ω, η due k-forme e f, g funzioni differenziabili su U si ha

$$*(f\omega + g\eta) = f(*\omega) + g(*\eta)$$

Però l'operatore $*$ non è un omomorfismo di anelli, di nuovo per semplici questioni di grado: se ω, η sono delle 1-forme, allora $*\omega \wedge *\eta$ è una $(2n-2)$-forma (certamente nulla se $n \geq 3$) mentre $*(\omega \wedge \eta)$ è una $(n-2)$-forma (non nulla, se $\omega \wedge \eta \neq 0$) e quindi i gradi sono diversi.

Esercizio 2.5. Sia ω una k-forma in n variabili. Quanto vale $**\omega$? Basta farlo per i monomi e poiché su un monomio $*dx_I = \pm dx_J$, dove in J ci sono le variabili che non ci sono in I, è chiaro che $**\omega = \pm\omega$. Dimostrare che

$$**\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$$

2.2 La contrazione di una forma

Ricordiamo che una k-forma differenziale è una famiglia di forme k-lineari alternanti che operano sullo spazio tangente. Per esempio, se ω è una 1-forma e X è un campo vettoriale, possiamo definire la funzione $\omega(X) : U \to \mathbb{R}$ data da

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p)$$

dove a destra c'è il valore della forma lineare ω_p (la forma ω nel punto p) applicata al vettore X_p (il vettore del campo X nel punto p).

In questo modo, usando il campo X, passiamo dalla 1-forma ω alla 0-forma (una funzione) $\omega(X)$. Questa operazione, che abbassa di 1 il grado di una forma, si chiama *contrazione* e si può definire per forme di ogni grado.

Definizione 2.6. Siano X un campo vettoriale e ω una k-forma. La *contrazione* (o *prodotto interno*), denotata con $\iota_X(\omega)$ oppure $X \lrcorner\, \omega$ è la $(k-1)$-forma definita da

$$X \lrcorner\, \omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1})$$

per ogni scelta di Y_1, ..., Y_{k-1} campi vettoriali.

Esempio 2.7. Prendiamo il campo $X(x, y, z) = (x, y, z)$. Questo campo è il campo su $\mathbb{R}^3$ che "punta in fuori", centrato nell'origine. Il modulo dei vettori del campo aumenta all'aumentare della distanza del punto dall'origine.

Sia $\omega = dx \wedge dy$. Cosa è $X \lrcorner\, \omega$? Per definizione è una 1-forma e quindi è una combinazione lineare di dx, dy, dz.

$$X \lrcorner\, \omega = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$$

Per capire i coefficienti, basta applicare questa forma ai campi vettoriali della base:

$$(\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz)(\mathbf{e}_1|_p) = \alpha(p)$$

e analogamente per β e γ. In termini della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, il campo X si scrive

$$X(x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Si ha

$$\begin{aligned} X \lrcorner\, \omega(\mathbf{e}_1|_p) &= \omega(X, \mathbf{e}_1) \\ &= (dx \wedge dy)\,(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\ &= \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= -y \end{aligned}$$

e analogamente (fare i calcoli!!)

$$X \lrcorner\, \omega(\mathbf{e}_2|_p) = x, \qquad X \lrcorner\, \omega(\mathbf{e}_3|_p) = 0$$

Dunque

$$X \lrcorner\, \omega = -y\, dx + x\, dy$$

2.3 La dualità

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e V^* il suo duale. Sappiamo che V e V^* sono isomorfi. Però non c'è un isomorfismo canonico: per fissare un isomorfismo dobbiamo fissare una base di V.

La situazione è migliore quando V è uno spazio vettoriale *euclideo* e cioè se abbiamo un prodotto scalare su V. Allora possiamo ottenere un isomorfismo $f : V \to V^*$ senza dover fissare basi nel seguente modo. Per $\mathbf{x} \in V$, dobbiamo definire l'elemento $f(\mathbf{x}) \in V^*$ e cioè $f(\mathbf{x})$ è una funzione lineare $V \to \mathbb{R}$. Allora si definisce

$$f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

dove a destra c'è il prodotto scalare in V. A volte si scrive

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, - \rangle$$

indicando con $-$ il posto della variabile indipendente. La funzione $f(\mathbf{x})$ è lineare perché il prodotto scalare è lineare nella *seconda* variabile (è bilineare). La funzione $f : V \to V^*$ è lineare perché il prodotto scalare è lineare nella *prima* variabile.

Calcoliamo $\ker f$: un elemento $\mathbf{x} \in V$ sta nel nucleo se $f(\mathbf{x}) = 0 \in V^*$ è l'applicazione lineare nulla e cioè se

$$f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{v} \in V$$

ma poiché il prodotto scalare è non degenere, questo implica che $\mathbf{x} = 0$ e dunque f è iniettiva. Gli spazi V e V^* hanno la stessa dimensione e perciò un omomorfismo iniettivo è anche suriettivo e dunque un isomorfismo.

Ripetiamo adesso questo discorso per gli spazi tangenti e cotangenti e cioè poniamo $V = T_p\mathbb{R}^n$ e $V^* = T_p^*\mathbb{R}^n$. Il prodotto scalare su $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ è quello standard su $\mathbb{R}^n$ e la base canonica $\{\mathbf{e}_1|_p, \dots, \mathbf{e}_n|_p\}$ è ortonormale per questo prodotto. Se

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1|_p + \alpha_2 \mathbf{e}_2|_p + \dots \alpha_n \mathbf{e}_n|_p$$

è un vettore tangente in p, il prodotto scalare con i vettori della base vale

$$\langle \mathbf{e}_i|_p, \mathbf{v} \rangle = \alpha_i$$

e dunque $f(\mathbf{e}_i|_p) = dx_i$, cioè f è proprio l'omomorfismo che fa corrispondere la base di $T_p\mathbb{R}^n$ con la base duale data dai differenziali delle coordinate.

C'è una convenzione (che non stiamo seguendo) sul diverso posizionamento degli indici nel caso dei vettori tangenti e delle forme differenziali. Questa convenzione è seguita soprattutto in campo fisico (la vedrete l'anno prossimo nel corso di Meccanica Razionale e in generale nei corsi di Fisica Matematica) e posiziona gli indici dei differenziali *in basso* (come facciamo noi) e gli indici dei vettori *in alto*: scriveremmo la base $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n\}$.

Usando questa convenzione, l'isomorfismo f che abbiamo scritto si ricorda facilmente perché "abbassa gli indici", mentre l'isomorfismo inverso "alza gli indici". Questo suggerisce una nomenclatura (e notazione) "musicale" per questi isomorfismi: $f(\mathbf{x})$ si scrive $\mathbf{x}^\flat$ e si legge "$\mathbf{x}$ bemolle", mentre l'isomorfismo inverso si scrive $\omega^\sharp$ e si legge "ω diesis".

Diamo la definizione precisa e fissiamo le notazioni:

Definizione 2.8. Per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ il prodotto scalare standard su $T_p\mathbb{R}^n$ induce un isomorfismo $^\flat : T_p\mathbb{R}^n \to T_p^*\mathbb{R}^n$ dato da $\mathbf{x}_p^b = \omega_p$, dove ω_p è tale che

$$\mathbf{x}_p^\flat(\mathbf{v}) = \omega_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}_p, \mathbf{v} \rangle$$

per ogni $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{R}^n$.

Come abbiamo osservato

$$(\mathbf{e}_i)^\flat = dx_i$$

L'isomorfismo inverso è denotato con $^\sharp : T_p^*\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n$.

Questi isomorfismi valgono punto per punto e quindi per un campo vettoriale X o per una 1-forma ω,

$$X = \sum_i f_i(x)\mathbf{e}_i \longrightarrow X^b = \sum_i f_i(x)\, dx_i$$

e

$$\omega = \sum_i g_i(x)\, dx_i \longrightarrow \omega^\sharp = \sum_i g_i(x)\mathbf{e}_i$$

Dunque queste funzioni trasformano campi vettoriali in 1-forme e viceversa. L'uso di questa notazione è molto comodo e permetterà di semplificare la scrittura delle formule che vedremo fra poco.

2.4 Operatori differenziali classici

Definizione 2.9. *(Divergenza di un campo vettoriale)* Un campo vettoriale

$$X = \sum f_i(x)\mathbf{e}_i$$

su $\mathbb{R}^n$ può essere considerato come una funzione $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (le f_i sono le componenti scalari della funzione vettoriale X). Definiamo allora una funzione $\operatorname{div} X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la *divergenza* di X, come

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}(dX)_p$$

dove dX è il differenziale della funzione X. Quindi dX_p è una funzione lineare $dX_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{X(p)}\mathbb{R}^n$ e tr è la sua traccia, che non dipende dal sistema di coordinate usato.

In componenti, nelle basi standard di $T_p\mathbb{R}^n$ e $T_{X(p)}\mathbb{R}^n$, la matrice di dX_p è data da

$$dX_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)$$

e quindi

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p)$$

Definizione 2.10. *(Gradiente di una funzione)* Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Definiamo un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ $\operatorname{grad} f$, il *gradiente* di f, come

$$(\operatorname{grad} f)_p = (df_p)^\sharp$$

dove *df* è il differenziale della funzione f. Simmetricamente, si ha anche

$$(df)_p = (\operatorname{grad} f)_p^\flat$$

In componenti, $df_p = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, dx_i$ e quindi

$$(\operatorname{grad} f)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, \mathbf{e}_i$$

Notiamo che con questa terminologia la differenza fra *gradiente* (un campo vettoriale) e *differenziale* (una 1-forma differenziale) è evidente. Anche se nelle basi corrispondenti hanno le stesse coordinate, sono due oggetti completamente diversi.

Definizione 2.11. *(Laplaciano di una funzione)* Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Definiamo una funzione $\Delta f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il *Laplaciano* di f, come

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

Calcolando, si ha che il Laplaciano è la traccia della matrice Hessiana e cioè

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p)$$

Definizione 2.12. *(Rotore di un campo vettoriale)* Sia X un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$. Definiamo una $(n-2)$-forma differenziale $\operatorname{rot} X$, il *rotore* di X, come

$$\operatorname{rot} X = *(dX^\flat)$$

dove $X^\flat$ è la 1-forma che si ottiene dal campo X mediante l'isomorfismo canonico dato dal prodotto scalare.

Notiamo che quando $n = 3$, $\operatorname{rot} X$ è una 1-forma che quindi corrisponde ad un campo vettoriale $Y = (\operatorname{rot} X)^\sharp$. Questo campo Y viene anch'esso chiamato il *rotore* di X.

Svolgiamo i calcoli per $n = 3$:

$$X = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$$

dunque

$$X^\flat = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + f_3\, dx_3$$

Allora

$$dX^\flat = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3$$

Calcoliamo l'operatore $*$ di Hodge:

$$*(dx_1 \wedge dx_2) = dx_3, \qquad *(dx_1 \wedge dx_3) = -dx_2, \qquad *(dx_2 \wedge dx_3) = dx_1$$

(basta controllare la parità delle permutazioni) e quindi:

$$\operatorname{rot} X = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_1 - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_3$$

e il campo vettoriale associato è

$$Y = (\operatorname{rot} X)^\sharp = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \mathbf{e}_3$$

proprio come definito in Analisi Matematica.

3 Esercizi, parte 2

Vediamo qualche esercizio che riguarda forme, campi vettoriali e gli operatori appena introdotti.

Esercizio 3.1. Nell'Esercizio 1.7 abbiamo considerato l'*elemento di volume* su $\mathbb{R}^n$ come la n-forma data da

$$\nu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Nell'esercizio indicato abbiamo considerato ν come una n-forma su uno spazio vettoriale, ma possiamo anche pensarla come una n-forma *differenziale* e cioè definita in tutti i punti di $\mathbb{R}^n$, che dà una forma n-lineare alternante su tutti gli spazi tangenti.

Chiamiamo questa forma differenziale la *forma di volume* e la indichiamo con

$$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Sia X un campo vettoriale differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e dV la forma di volume su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

(1) $d(*X^b) = (\operatorname{div} X)\, dV$ o, equivalentemente, $\operatorname{div} X = *d(*X^\flat)$;

(2) in vista del punto precedente, dV è una forma esatta? (la risposta è ovvia anche senza il punto precedente, usando il lemma di Poincaré) se sì, determinare una $(n-1)$-forma ω tale che $d\omega = dV$;

Soluzione.
(1) Questo è un calcolo: scriviamo il campo come

$$X = \sum f_i(x)\mathbf{e}_i$$

$$X^\flat = \sum f_i(x)\, dx_i$$

Calcoliamo lo $*$ di Hodge, ricordando l'Esempio 2.2:

$$*X^\flat = \sum (-1)^{i-1} f_i(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

dove ricordiamo che $\widehat{dx_i}$ significa che il termine dx_i non è presente. Calcoliamo adesso il differenziale:

$$d(*X^\flat) = \sum (-1)^{i-1} df_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Il differenziale df_i ha tutte le derivate parziali e i differenziali di tutte le coordinate. Poiché è moltiplicato per una $(n-1)$-forma, sopravvive solo il termine dx_i e quindi

$$d(*X^\flat) = \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Per riportare dx_i al suo posto, occorrono $(i-1)$ scambi e quindi il segno cambia per $(-1)^{i-1}$ e dunque in totale $(2i-2)$ volte. Questo numero è sempre pari e quindi il segno di tutti gli addendi è positivo. In conclusione

$$d(*X^\flat) = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = (\operatorname{div} X) dV$$

(2) L'idea è scrivere

$$dV = \frac{1}{\operatorname{div} X} d(*X^\flat)$$

da cui si vede che dV è esatta in quanto è la derivata esterna della forma $*X^\flat$. Però dobbiamo essere sicuri di poter dividere e che il termine $\operatorname{div} X$ non influisca sul calcolo della derivata: la strada più semplice è trovare un campo X per cui $\operatorname{div} X = 1$ (o almeno costante). Un tale campo è

$$X_1 = x_1 \mathbf{e}_1$$

e quindi basta adesso ripetere per questo campo i calcoli precedenti. Si ha $X_1^\flat = x_1\, dx_1$ e quindi

$$*X_1^\flat = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Osserviamo che ci sono molti altri campi che possono andare bene. Per esempio, tutti i campi

$$X_i = (-1)^{i-1} x_i \mathbf{e}_i$$

producono delle $(n-1)$-forme $*X_i^\flat$ la cui derivata esterna è sempre dV.

È ovvio che la risposta non può essere unica: una forma la cui derivata esterna è una forma data è analoga ad una *primitiva* per una funzione e sappiamo bene che la primitiva non è mai unica (ci sono le "costanti di integrazione"). Qui la situazione è un po' diversa, perché le forme che si ottengono dai vari campi non differiscono per delle costanti e quindi sembrano esserci più "gradi di libertà" nel determinare una primitiva.

- sapete trovare altre primitive?
- ci sono infinite primitive "essenzialmente diverse"?
- sapete trovare tutte le primitive?

Esercizio 3.2. Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni differenziabili, X un campo vettoriale differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e dV la forma di volume su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

(1) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle$;

(2) $d(*df) = (\Delta f)\, dV$ o, equivalentemente, $\Delta f = *d(*df)$;

(3) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$;

(4) $*X^\flat = X \lrcorner\, dV$;

(5) sia $n = 3$. Allora $\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$. Si può dare un senso a quest'affermazione quando $n \neq 3$?

Soluzione. Risolvete voi quest'ultimo esercizio, usando le formule viste negli esercizi precedenti. Se avete difficoltà con le formule generali, fate prima il caso $n = 3$ e cercate di vedere se la vostra soluzione vale in generale.