Corso di Studi in Matematica
GEOMETRIA 2
Prova scritta del 13 luglio 2020

COGNOME ....**NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (9 punti) Sia $X = \mathbb{R}$ e consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di X

$$A \in \mathcal{T} \iff [x \in A \implies x^3 \in A]$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.

(b) Sia $a \in X$ e consideriamo gli insiemi

$$U_a = \{a^{3^k} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \{a, a^3, a^9, \dots\},$$
$$V_a = \{a^{3^k} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, a^{1/3}, a, a^3, a^9, \dots\}.$$

Dimostrare che U_a è aperto, e che V_a è aperto e chiuso.

(c) Sia $a \in X$ e sia $\mathcal{I}(a)$ la famiglia di tutti gli intorni di a. Dimostrare che

$$\bigcap_{U \in \mathcal{I}(a)} U = U_a$$

(d) $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff?

(e) Il punto (b) dimostra che $(X, \mathcal{T})$ non è connesso. Dimostrare che ha infinite componenti connesse.

Soluzione.

1. $\emptyset$ e $X \in \mathcal{T}$ per motivi ovvi.

   Se $A, B \in \mathcal{T}$ e $x \in A \cap B$, allora $x \in A \implies x^3 \in A$ e $x \in B \implies x^3 \in B$. Dunque $x^3 \in A \cap B$ e cioè $A \cap B \in \mathcal{T}$.

   Se $A_i \in \mathcal{T}$ e $x \in \bigcup_i A_i$, allora esiste j tale che $x \in A_j$ e dunque $x^3 \in A_j$. Dunque $x^3 \in \bigcup_i A_i$ e cioè $\bigcup_i A_i \in \mathcal{T}$.

2. È immediato che U_a soddisfa la condizione di essere aperto: se $x = a^{3^k} \in U_a$, allora $x^3 = \left(a^{3^k}\right)^3 = a^{3 \cdot 3^k} = a^{3^{(k+1)}} \in U_a$

   V_a è aperto con una dimostrazione simile alla precedente per U_a. Sia ora $b \notin V_a$. Se $b^3 \in V_a$, allora $b^3 = a^{3^k}$ e quindi

   $$b = a^{3^{k-1}}$$

   perché la funzione $x \mapsto x^3$ è biunivoca su $\mathbb{R}$. Ma allora $b \in V_a$ contro l'ipotesi. Dunque

   $$b \notin V_a \implies b^3 \notin V_a$$

   e cioè il complementare di V_a è aperto e quindi V_a è chiuso.

3. Sia $U \in \mathcal{I}(a)$ un intorno di a. Allora U deve contenere un aperto A_U che contiene a. Poiché A_U è aperto, allora contiene anche a^3. Ma allora contiene anche $\left(a^3\right)^3 = a^9$ e quindi contiene anche $(a^9)^3 = a^{27}$ e così via. Quindi $U_a \subseteq A_U \subseteq U$.

   Dunque ogni intorno di a contiene U_a e quindi

   $$U_a \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{I}(a)} U$$

   Poiché U_a è aperto e contiene a, è uno degli intorni presenti nell'intersezione e quindi vale anche l'inclusione opposta.

4. Non è di Hausdorff, per esempio siano $x = 2$ e $y = 2^3$, allora ogni aperto non vuoto che contiene x contiene anche y.

5. Gli insieme del tipo V_p dove $p \in \mathbb{N}$ è un numero primo sono tutti aperti e chiusi e sono disgiunti. Dunque ognuno contiene almeno una componente connessa diversa e ci sono perciò infinite componenti connesse.

Esercizio 2. (6 punti) Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo la sequenze

$$W_1 = a\,d\,b\,c^{-1}\,e^{-1}\,d^{-1}\,b\,c\,a^{-1}\,e$$

e

$$W_2 = c\,b^{-1}\,c^{-1}\,a^{-1}\,d\,b\,d^{-1}\,a$$

Determinare la classe di omeomorfismo della somma connessa $S = S_1 \sharp S_2$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Soluzione. S_1 ha 1 vertice, 5 spigoli e 1 faccia, dunque ha caratteristica $1-5+1=-3$. Poiché non è orientabile, è la somma connessa di cinque piani proiettivi.

S_2 ha 3 vertici, 4 spigoli e 1 faccia, dunque ha caratteristica $3-4+1=0$. Poiché è orientabile, è un toro.

In conclusione, $S = S_1 \sharp S_2$ è la somma connessa di cinque piani proiettivi e un toro e quindi è la **somma di sette piani proiettivi** e la sua caratteristica è

$$\chi(S) = 2-7 = -5 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

Esercizio 3. (9 punti) Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire se A e B sono simultaneamente diagonalizzabili.

(b) Se sì, trovare una base comune che le diagonalizza entrambe.

Soluzione. Si verifica subito che

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -18 & -9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

Gli autovalori di A sono $1, -1, 2$, essendo distinti si sa che A è diagonalizzabile, e gli autospazi relativi sono

$$\begin{aligned} V_A(1) &= \{(x,y,z) \mid y = z = 0\} = \langle (1,0,0) \rangle, \\ V_A(-1) &= \{(x,y,z) \mid z = -2y, x = 6y\} = \langle (6,1,-2) \rangle, \\ V_A(2) &= \{(x,y,z) \mid y = 0, x = -3z\} = \langle (-3,0,1) \rangle. \end{aligned}$$

Gli autovalori di B sono 1 con $m_a = 2$ e -1 con $m_a = 1$ e gli autospazi relativi sono

$$\begin{aligned} V_B(1) &= \{(x,y,z) \mid x = -3z\} = \langle (0,1,0), (-3,0,1) \rangle, \\ V_B(-1) &= \{(x,y,z) \mid y = z = 0\} = \langle (1,0,0) \rangle, \end{aligned}$$

dunque anche B è diagonalizzabile. Quindi A e B sono simultaneamente diagonalizzabili.

Poiché A ha tutti gli autospazi di dimensione 1, l'unica base comune possibile è una base di autovettori di A. Dunque

$$\mathcal{B} = \{(6,1,-2), (-3,0,1), (1,0,0)\}$$

Nota: $((6,1,-2) \in V_B(1)$

Esercizio 4. (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico) (8 punti) Si considerino le funzioni $F_k : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ date da

$$F_k\big((x_0 : x_1 : x_2)\big) = (kx_0 + 2x_1 - 3x_2 : -3x_1 + kx_2 : -3kx_2),$$

dove k è un parametro reale.

(a) Determinare i valori di k per cui F_k è una proiettività.

(b) Per $k = 1$, trovarne i punti fissi.

Soluzione.

La matrice della funzione F_k è

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2 & -3 \\ 0 & -3 & k \\ 0 & 0 & -3k \end{pmatrix}.$$

F_k è una proiettività se e solo se $\det A_k = 9k^2 \neq 0$ se e solo se $k \neq 0$.

Per $k = 1$, gli autovalori di A_1 sono 1 di $m_a = 1$ e -3 di $m_a = 2$, gli autospazi sono

$$\begin{aligned} V(1) &= \{x,y,z) \mid y = z = 0\} = \langle(1,0,0)\rangle, \\ V(-3) &= \{(x,y,z) \mid y = -2x, z = 0\} = \langle(1,-2,0)\rangle. \end{aligned}$$

Quindi i punti fissi di F_1 sono $P = [1 : 0 : 0]$ e $Q = [1 : -2 : 0]$.

Nota: l'autospazio $V(-3)$ ha dimensione 1 e non 2 come la molteplicità algebrica.