TEOREMA 1. Sia data l'equazione

$$(E) \qquad u_t + a(t,x,u)\,u_x = b(t,x,u)$$

con $a,b \in C^1(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$. $u \in C^1(\Omega)$ è soluzione di (E) se e solo se il suo grafico

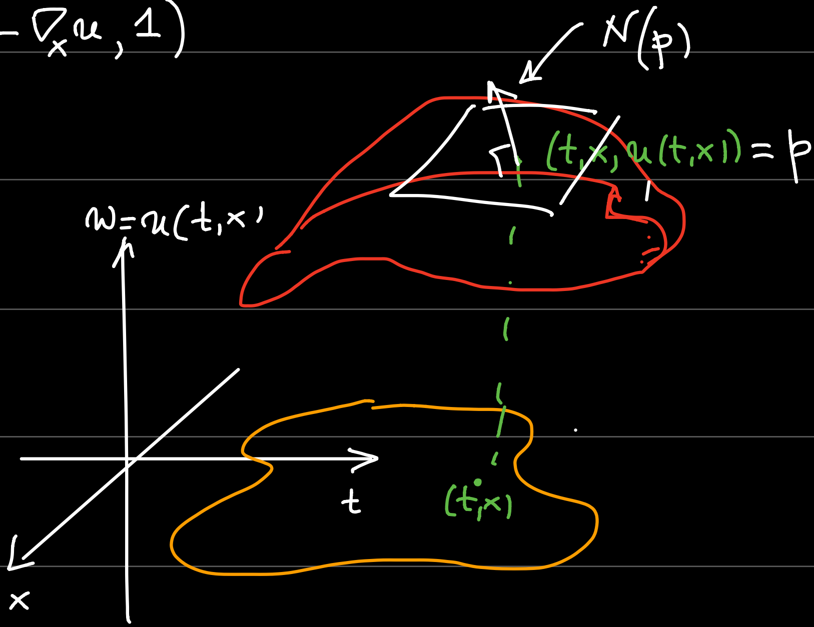
$$G = \{ (t,x,w) \in \mathcal{D} : \ w = u(t,x) \}$$

è in ogni punto $p = (t,x,w)$ tangente al campo vettoriale

$$\vec{F}(p) = (1, a(p), b(p)).$$

Dimostrazione: Consideriamo il grafico G come l'insieme di livello zero della funzione $G(t,x,w) = w - u(t,x)$

$$\nabla_{(t,x,w)} G = (-u_t, -\nabla_x u, 1)$$



Calcoliamo il versore normale al grafico nel punto $p = (t,x,u(t,x))$

$$N(p) = \frac{(-u_t, -\nabla_x u, 1)}{\sqrt{u_t^2 + |\nabla_x u|^2 + 1}}$$

$(1, a(p), b(p))$

Osserviamo che $N(p) \cdot \vec{F}(p) = \dfrac{-u_t - a(t,x,u) \cdot \nabla_x u + b(t,x,u)}{\sqrt{u_t^2 + |\nabla_x u|^2 + 1}} = 0$.

Dunque u é soluzione dell'equazione se e solo se

$N(p)$ é ortogonale a $\underbrace{\vec{F}(p)}_{\text{é tangente a } G_u}$ $\forall p \in G_u$. $\blacksquare$

Le curve caratteristiche in $\mathcal{D}$ sono le soluzioni $(t, v(t), w(t)) \in \mathcal{D}$

del sistema (ancora detto sistema caratteristico):

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{v} = a(t, v, w) \\ \dot{w} = b(t, v, w) \end{cases}$$

$(t, v(t), w(t))$

Osserviamo che le curve caratteristiche sono in ogni punto

tangenti al campo $\vec{F}(p) = (1, a(p), b(p))$.

Fissato un punto $p_0 = (t_0, x_0, u_0) \in \mathcal{D}$, il problema di

Cauchy $\begin{cases} \dot{v} = a(t, v, w) \\ \dot{w} = b(t, v, w) \\ v(t_0) = x_0 \\ w(t_0) = u_0 \end{cases}$

ammette un'unica soluzione locale se a e b sono di classe C^1

con u come unica soluzione (PEC) ... in Ω

TEOREMA 2: Se la funzione u è soluzione di (E), allora il suo grafico G è unione di (immagini di) curve caratteristiche

$$G = \bigcup_{p_0 \in G} \Gamma(p_0) \subset \mathcal{D}$$

Dim: si tratta di dimostrare che, se $p_0 \in G \Rightarrow \Gamma(p_0) \subset G$.

Sia $p_0 = (t_0, x_0, u_0) \in \mathcal{D}$ e sia $\psi(t) \overset{def}{=} w(t) - u(t, v(t))$

dove $(v(t), w(t))$ risolve il sistema (S) nell'intervallo temporale $I \ni t_0$ e $v(t_0) = x_0$, $w(t_0) = u_0$.

Allora $$\dot\psi = \dot w(t) - u_t(t, v(t)) - \nabla_x u(t,v) \cdot \dot v(t)$$

$$= b(t, v(t), w(t)) - u_t(t, v(t)) - \nabla_x u(t, v(t)) \cdot a(t, v(t), w(t))$$

$$= b(t, v(t), \psi(t) + u(t, v(t))) - u_t(t, v(t)) - \nabla_x u(t, v(t)) \cdot (a(t, v(t), \psi + u)$$

$$= F(t, \psi(t))$$

dove

$$F(t,q) = b(t, v(t), q + u(t, v(t))) - u_t(t, v(t)) - \nabla_x u(t, v(t)) \cdot a(t, v(t), q + u(t, v(t)))$$

Dal fatto che u risolve l'equazione deduciamo che

$$F(t, 0) = 0 \qquad \forall t \in I$$

Dunque ψ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot\psi = F(t, \psi) \\ \psi(t_0) = 0 \end{cases}$$

Poiché 0 é soluzione, applichiamo la parte di unicità del teorema di esistenza e unicità locale per le EDO ($F \in C^1$).

In definitiva, $\psi(t) = w(t) - u(t, v(t)) = 0 \quad \forall t \in I$,

che equivale a $(t, v(t), w(t)) \in G$. $\blacksquare$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} u_t + a(t,x,u) \cdot \nabla_x u(t,x) = b(t,x,u) \\ u(t_0, x) = g(x) \qquad \forall x \in J \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto} \end{cases}$$

Consideriamo il sistema caratteristico associato:

$$(S) \qquad \begin{cases} \dot{v} = a(t,v,w) \\ \dot{w} = b(t,v,w) \end{cases} \qquad \begin{cases} v(t_0) = \eta \\ w(t_0) = g(\eta) \end{cases}$$

Consideriamo l'unione delle curve caratteristiche che, all'istante t_0 passano per il grafico di g:

$$S(g) = \bigcup_{\eta \in J} \Gamma(t_0, \eta, g(\eta)) \subseteq \underset{\underset{t}{\Psi}}{I} \times \underset{\underset{\eta}{\Psi}}{J} \times \underset{\underset{g(\eta)}{\Psi}}{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Vogliamo stabilire se $S(g)$ é il grafico di una funzione $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Esaminiamo il problema attraverso un esempio:

<u>ESEMPIO</u>: Risolvere il problema

$$\begin{cases} t u_t + (t+u) u_x = x - t \\ u(1,x) = x+1 \end{cases}$$

dividiamo per t

$$u_t + \left(1 + \frac{u}{t}\right) u_x = \frac{x}{t} - 1$$

$a(t,x,u) = 1 + \frac{u}{t}$; $b(t,x,u) = \frac{x}{t} - 1$; $t_0 = 1$, $g(x) = x+1$

Consideriamo il <u>sistema caratteristico</u>

$$\begin{cases} \dot{v} = 1 + \frac{w}{t} \\ \dot{w} = \frac{v}{t} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(r,1) = r \\ w(r,1) = r+1 \end{cases}$$

Usiamo un artificio: sottraendo le due equazioni abbiamo

$$(\dot{v} - \dot{w}) = \frac{w - v}{t} + 2 = -\frac{v - w}{t} + 2 \qquad v(r,1) - w(r,1) = 1$$

e sommandole

$$(\dot{v} + \dot{w}) = \frac{w+v}{t} \qquad v(r,1) + w(r,1) = 2r+1$$

Poniamo $V = v + w$, $W = v - w$

$$\dot{V} = \frac{V}{t} \qquad V(r,1) = 2r+1 \quad \Rightarrow \quad V(t) = (2r+1)t$$

$$\dot{W} = -\frac{W}{t} + 2 \qquad W(r,1) = 1 \quad \Rightarrow \quad W(t) = -\frac{2}{t} + t$$

da cui $\quad v(t,r) = rt - \frac{1}{t} + t \quad$ e $\quad w(t,r) = rt + \frac{1}{t}$

Per ogni $r \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$\Gamma(r) = \{ (t, v(t,r), w(t,r)) \mid t > 0 \}$$

é (il sostegno di una) curva caratteristica. Vogliamo trovare una funzione $u(t,x)$ tale che il grafico

$$G(u) = \{ (t,x,u(t,x)) : (t,x) \in \Omega \} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \Gamma_r$$

** Trovare Ω é parte del problema, insieme alla funzione u. Dovremo avere $\quad x = v(t,r) \quad$ e $\quad u(t,x) = w(t,r)$

Occorre quindi risolvere $x = v(t,r)$, ricavando $r = r(t,x)$ e inserire in $\quad u(t,x) = w(t, r(t,x))$. Nel nostro esempio

$$x = rt - \frac{1}{t} + t \implies r = \frac{1}{t}\left(x - t + \frac{1}{t}\right)$$

e dunque $\quad u(t,x) = w(t, r(t,x)) = r(t,x)t + \frac{1}{t} = x - t + \frac{2}{t}$. ☒

Cerchiamo di esprimere questo metodo attraverso un teorema.

TEOREMA 3: Siano $a, b \in C^1(\mathcal{D})$ e sia $g: J \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(J)$. Sia $x_0 \in J$ tale che $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$. Allora esiste un intorno N di (t_0, x_0) ed una funzione $u: N \to \mathbb{R}$ soluzione di (E) tale che $u(t_0, x) = g(x)$ $\forall x$ t.c. $(t_0, x) \in N$.

Dim: Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{v} = a(t, u, v) \\ \dot{w} = b(t, u, v) \\ v(t_0) = r \\ w(t_0) = g(r) \end{cases}$$

con r in un intorno di x_0 – Sia $J_0 \subset\subset J$, Dalla teoria delle equazioni ordinarie, se $a, b \in C^1(\mathcal{D})$ $\exists$ un intervallo comune di esistenza $I_0 \ni t_0$: $r \in J_0$ $\exists!$ sol. di (PC)

Ottengo una soluzione $(v(t,r), w(t,r))$. Il teorema di dipendenza continua dai dati ci dice che $v, w \in C^1(I_0 \times J_0)$

La mia soluzione $u(t,x)$ è definita implicitamente da $x = v(t, r) \longrightarrow r = R(t, x)$

$$\boxed{u(t,x) = w(t, R(t,x))}$$

Considero la funzione $\boxed{f(t, r, x) = x - v(t,r)}$ – f è di classe C^1 e $f(t_0, x_0, x_0) = 0$. Inoltre $\frac{\partial f}{\partial r}(t_0, x, x) = -\frac{\partial v}{\partial r}(t_0, x, x)$ $= -1$, perché $v(t_0, r) = r$ $\forall x \in J_0$. Dunque, per il teorema di Dini, esiste un intervallo $J_1 \subset J_0$ t.c. esiste la funzione $R = R(t, x)$ t.c.

$$f(t, r, x) = 0 \quad \text{in } I_1 \times J_1 \times J_1 \iff r = R(t, x)$$

A questo punto la soluzione sarà definita da

$$u(t, x) = w(t, R(t, x))$$

Proviamo che u risolve l'equazione. Per farlo, calcoliamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{w} + \frac{\partial w}{\partial r}\dot{R}$$

e $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial R}{\partial x}$$

Dobbiamo calcolare le derivate della funzione R, che è definita implicitamente da $\boxed{x - v(t, R(t, x)) = 0}$

Derivo rispetto a t per ricavare $\dot{R}$:

$$-\dot{v} - \frac{\partial v}{\partial r}\dot{R} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{R} = -\frac{a}{\frac{\partial v}{\partial r}}} \quad \text{. Quindi}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = b - \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial r}} a}$$

Ora torno a $\boxed{x - v(t, R(t, x)) = 0}$ e derivo rispetto a x:

$$1 - \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial r}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial r}}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = b}$$

OSSERVAZIONE : Il passaggio chiave è l'inversione della relazione $x = v(t,r)$ rispetto a r.

Se a non dipende da u è sempre possibile, almeno se $a \in C^1$ e cresce al più linearmente in x : infatti il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{v} = a(t,v) \\ v(z) = x \end{cases}$$

ha soluzione unica per tutti i tempi, positivi e negativi.

Dati x e z, consideriamo l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \dot{v} = a(t,v) \\ v(z) = x \end{cases}$$

e calcoliamola per $t = t_0$: $(z,x) \longmapsto v(t_0) = r$

(attenzione, qui z gioca il ruolo di t). Questo permette di esplicitare r nella relazione $x = v(t,r)$. $\boxtimes$