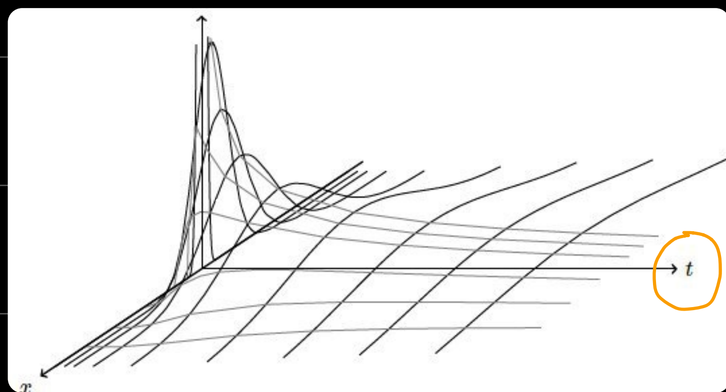
La distribuzione di Dirac

Vogliamo descrivere il comportamento della soluzione fondamentale

$$\boxed{\Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{t}}} \quad \text{per } t \to 0^+.$$

Si tratta di una famiglia di Gaussiane normalizzate che "piccano" nell'origine:



Definizione: lo spazio $C_b(\mathbb{R}^n)$ denoto lo spazio delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}^n$, dotato della norma del sup.

La distribuzione di Dirac è l'applicazione lineare $\boxed{\delta : C_b(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}}$ definita da $\delta(g) = g(0)$. [In generale, $\delta_\xi(g) = g(\xi)$]

TEOREMA: Per ogni $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ si ha che

$$\boxed{\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} g(x)\,dx = g(0) = \delta(g)}$$

Dimostrazione: $\Phi(t,x) =: \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. $\quad \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\,dx = 1$

Consideriamo $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\,[g(x)-g(0)]\,dx$ e dimostriamo che tende a zero per $t \to 0$.

① $|g(x)-g(0)| \le 2\|g\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \|g\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)|$

Inoltre, dato $\varepsilon > 0$, esiste un intorno di raggio $\rho > 0$ tale che

② $\boxed{|g(x)-g(0)| < \varepsilon \quad \forall x,\ |x|<\rho.}$ $\qquad$ g continua

Possiamo quindi scrivere

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)(g(x)-g(0))\,dx \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} \overset{\ge 0}{\Phi(t,x)}\, |g(x)-g(0)|\,dx =$$

$$\int_{|x|\ge\rho} \Phi(t,x)|g(x)-g(0)|\,dx + \int_{|x|<\rho} \Phi(t,x)\,\underbrace{|g(x)-g(0)|}\,dx$$

$$\le 2\|g\| \int_{|x|\ge\rho} \Phi(t,x)\,dx + \varepsilon$$

Poniamo $x = \sqrt{4t}\,y$, in modo che $dx = (4t)^{n/2}\,dy$

e $|x| \ge \rho \Rightarrow |y| \ge \frac{\rho}{\sqrt{4t}}$

Abbiamo $\int_{|x|\ge\rho} \Phi(t,x)\,dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|y|\ge \frac{\rho}{\sqrt{4t}}} e^{-|y|^2}\,dy \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

Dunque, dato $\varepsilon > 0$, $\exists\ \bar{t} > 0$ t.c.

$$2\|g\| \int_{|x|\geq \rho} \Phi(t,x)\,dx < \varepsilon$$

$\forall\, t \in (0, \bar{t})$

Pertanto, se $t \in (0,\bar{t})$ abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\,|g(x)-g(0)|\,dx < 2\varepsilon$$

Ma $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\,dx = 1 \quad \forall\, t$ - Dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\,g(x)\,dx \to g(0).$$

$\boxed{\text{//}}$

Osservazione: ci siamo appena avvalsi della proprietà seguente.

LEMMA: $\displaystyle \lim_{r \to +\infty} \int_{|y|\geq r} e^{-|y|^2}\,dy = 0$

Si tratta di un fatto generale - La funzione

$$\gamma(r) = \int_{|y|\geq r} e^{-|y|^2}\,dy$$

è una funzione decrescente in r - Il fatto che il suo limite sia zero corrisponde alla proprietà

$$\lim_{z\to+\infty} \int_{|y|\le z} e^{-|y|^2} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy \, .$$

cioé alla definizione di integrale improprio e alla proprietà delle misure che

$$\mu(X) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

qualora $A_{n+1} \supseteq A_n$, $\forall n$, e $X = \bigcup_n A_n$, con A_n misurabili.

In questo caso possiamo verificarlo direttamente, tenendo conto che

$y_i^2 \ge |y_i|$

$$\int_{|y|\ge z} e^{-|y|^2} dy \le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{|y_i|\ge z/\sqrt{n}} e^{-y_i^2} dy_i \right) \le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{|y_i|\ge z/\sqrt{n}} e^{-|y_i|} dy_i \right)$$

e $$\int_{|y_i|\ge z/\sqrt{n}} e^{-|y_i|} dy_i = 2\int_{t> z/\sqrt{n}} e^{-t} dt = 2e^{-z/\sqrt{n}} \to 0 \quad z\to+\infty$$

OSSERVAZIONE: Ogni funzione $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ definisce un'applicazione lineare (continua) su $C_b(\mathbb{R}^n)$: $T_f(g) =: \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) dx \in \mathbb{R}$

Abbiamo dunque $\lim_{t\to 0^+} T_{\Phi(t,\cdot)} = \delta_0$ - In altre parole

$$\begin{cases} \Phi_t = \Delta \Phi \\ \Phi(0,x) = \delta_0 \end{cases}$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY OMOGENEO

$$(PC) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adeguata.

integrali di Riemann — limiti di somme integrali

$$T_f(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,dx \simeq \boxed{\sum_i g(\xi_i) f(\xi_i) \Delta\xi_i} = \sum_i \delta_{\xi_i}(g) f(\xi_i) \Delta\xi_i$$

$$T_f \simeq \boxed{\sum_i f(\xi_i) \boxed{\Delta x_i \delta_{\xi_i}}}$$

ampiezza intervallini

δ di Dirac

se $\Phi(t, \xi - x) = \Phi(t, x - \xi)$ risolve l'equazione

$$\begin{cases} \Phi_t = \Delta \Phi \\ \Phi(0,x) = \delta_\xi \end{cases}$$

Quindi $u(t,x) = \sum_i \Phi(t, x - \xi_i) f(\xi_i) \Delta x_i$ risolve

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u(0,x) = \sum_i f(\xi_i) \Delta\xi_i \delta_{\xi_i} \longrightarrow f(x) \end{cases}$$

$$\sum_i \Phi(t, x - \xi_i) f(\xi_i) \Delta x_i \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) f(y)\,dy$$

TEOREMA: Detta $\Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ la soluzione fondamentale, e dato $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, sia

$$u(t,x) =: \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y)\, u_0(y)\, dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy$$

$t>0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Allora si ha

(i) u é ben definita e di classe C^∞ su $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$

(ii) $u_t - \Delta u = 0 \qquad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$

(iii) $\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = u_0(x)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ in cui u_0 é continua.

OSSERVAZIONE: Il teorema permette di dare una formula di rappresentazione per le soluzioni dell'equazione differenziale, in analogia con quanto succede con il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \iff y(t) = e^{tA} y_0$

e^{tA} é una famiglia a un parametro (t) di operatori

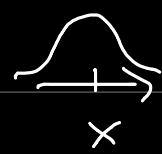
$T_t(f) =: g$ con

$$T_t(f) = g(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy$$

é pure una famiglia a un parametro di operatori (su che spazio di funzioni?) — $e^{0A} = \mathbb{1}$ $\quad T_0(f) = id$.

$$\lim_{t \to 0^+} T_t(f)(x) = f(x)$$

Prendiamo una funzione Φ e definiamo, per f funzione adeguata, $g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$



Se $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, dx = 1$ allora si tratta di una specie di media mobile di f rispetto alla misura di Φ.

L'operazione $f \longmapsto g$ va sotto il nome di convoluzione

$$g(x) = (\Phi * f)(x)$$

Stiamo asserendo che $u(t,x) = (\Phi(t,\cdot) * u_0)(x)$ é soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u(0,x) = u_0 \end{cases}$$