Principio del massimo

Dato un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, consideriamo i seguenti sottoinsiemi del cilindro chiuso $[0,T] \times \overline{\Omega}$. Si tratta di

cilindro chiuso

$$\Omega_T = (0,T] \times \Omega$$

$$\Gamma_T = \partial\Omega_T \setminus (\{T\} \times \Omega) = \{0\} \times \Omega \cup [0,T] \times \Omega$$

Notiamo che $\Omega_T \cup \Gamma_T = [0,T] \times \overline{\Omega}$. $\Omega_T \cap \Gamma_T = \phi$

Ω_T è detto cilindro parabolico, mentre Γ_T è detta frontiera parabolica

TEOREMA (Principio del massimo). Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, se u è soluzione dell'equazione del calore $u_t - \Delta u = 0$ in Ω_T ed è continua in $\Omega_T \cup \Gamma_T$, allora

$$\max_{\Omega_T \cup \Gamma_T} u = \max_{\Gamma_T} u$$

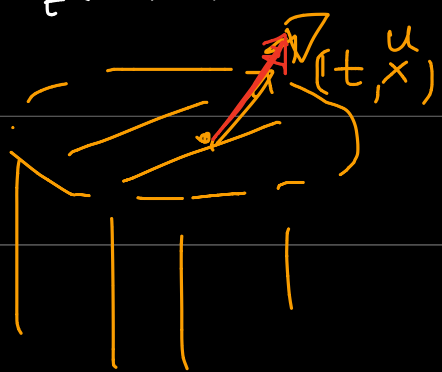
frontiera parabolica

cilindro chiuso

OSSERVAZIONE: Se $u_t - \Delta u < 0$ in Ω_T, la tesi è sicuramente vera. Sia $(\bar t, \bar x)$ un punto di massimo per u in $\Omega_T \cup \Gamma_T$ e supponiamo che $(\bar t, \bar x) \in \Omega_T$. Abbiamo (a) $u_t(\bar t, \bar x) = 0$ se $\bar t \in (0,T)$, o $u_t(\bar t, \bar x) \geq 0$ se $\bar t = T$.

$\nabla_{(t,x)} u(\bar t, \bar x) = 0$

$(\bar t, \bar x) \in (0,T) \times \Omega$



$u_t(\bar t, \bar x) \geq 0$

In più, (b) $\bar x$ è punto di massimo interno a Ω per $u(\bar t, \cdot)$ $\Rightarrow$ la matrice Hessiana $H_{u(\bar t, \cdot)}(\bar x)$ è semidefinita negativa. Quindi $\Delta_x u(\bar t, \bar x) \leq 0$. In definitiva, $(u_t - \Delta u)(\bar t, \bar x) \geq 0$. Assurdo.

Dimostrazione del teorema. Ci riconduciamo al caso precedente con un ragionamento perturbativo. Preso $\varepsilon > 0$, consideriamo

$$v(t,x) =: u(t,x) + \varepsilon |x|^2 \qquad \forall (t,x) \in \Omega_T \cup \Gamma_T$$

Abbiamo $v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - 2n\varepsilon < 0$

Dunque $\max_{\Omega_T \cup \Gamma_T} v = \max_{\Gamma_T} v$

Esiste dunque, per ogni $\varepsilon > 0$, un punto $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \Gamma_T$ che realizza il massimo di v su $\Omega_T \cup \Gamma_T$. In altre parole abbiamo $v(t,x) \le v(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \quad \forall (t,x) \in \Omega_T \cup \Gamma_T$.

Inoltre, $\forall (t,x) \in \Omega_T \cup \Gamma_T$

$$u(t,x) \le v(t,x) \le v(t_\varepsilon, x_\varepsilon) = u(t_\varepsilon, x_\varepsilon) + \varepsilon |x_\varepsilon|^2 \le u(t_\varepsilon, x_\varepsilon) + \varepsilon R^2$$

con R abbastanza grande per cui $\Omega \subset B_R(0)$.

Dunque $\forall \varepsilon > 0$

$$\max_{\Omega_T \cup \Gamma_T} u(t,x) \le \max_{\Gamma_T} u(t,x) + \varepsilon R^2$$

$$\Longrightarrow \quad \max_{\Omega_T \cup \Gamma_T} u(t,x) \le \max_{\Gamma_T} u(t,x) \qquad \blacksquare$$

UNICITÀ DELLE SOLUZIONI LIMITATE

TEOREMA. Data una funzione $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e limitata, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione limitata. $[\Phi(t,\cdot) * u_0]$

Dimostrazione. Come prima cosa dimostriamo che

$$\underbrace{\sup_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n} u(t,x)}_{\text{"}M\text{"}} = \underbrace{\sup_{\mathbb{R}^n} u_0(x)}_{\text{"}M_0\text{"}}$$

A tale fine, consideriamo $v(t,x) =: u(t,x) - \varepsilon(2nt + |x|^2)$

con $\varepsilon > 0$ – Anche v risolve l'equazione del calore.

e $v_0(x) =: v(0,x) = u_0(x) - \varepsilon|x|^2 \leq u_0(x) \leq M_0$

Inoltre:

$$\sup_{\substack{t\in[0,R]\\ |x|=R}} v(t,x) \leq M - \varepsilon(2nt + R^2) \leq M_0$$ se R è suff. grande

$$v(t,x) \leq M_0 \qquad |x| \geq R \text{ o } t \geq R$$

Applichiamo il principio del massimo con $\Omega = B_R(0)$ e $T = R^2$

$$\sup_{\Omega_T \cup \Gamma_T} v = \max_{\Gamma_T} v \leq M_0$$

$\{0\}\times\Omega$

ma se $|x| > R$ o $t > R^2$ ugualmente si ha $v(t,x) \leq M_0$

Quindi $\sup_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n} v \leq M_0$ – Ma $\varepsilon > 0$ è arbitrario e si verifica facilmente che, per la limitatezza di u si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n} v = \sup_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n} u \leq M_0$$

(per esercizio)

Dimostrato che $\sup_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n} u(t,x) = \sup_{\mathbb{R}^n} u_0$, l'unicità segue facilmente ragionando come segue: il problema omogeneo

$u_0 \equiv 0$

ha come unica soluzione limitata quella nulla (si ha infatti $u \leq 0$, ma anche $-u \leq 0$). Se due soluzioni limitate condividono lo stesso dato iniziale allora $u-v$ soddisfa il problema con $u_0 = 0$.

PRINCIPIO DEL CONFRONTO: se $u(0,x) \leq v(0,x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ con u, v limitate, allora $u(t,x) \leq v(t,x)$ $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

CONTROESEMPIO DI TYCHONOFF ALL'UNICITÀ

TEOREMA: Il problema di Cauchy

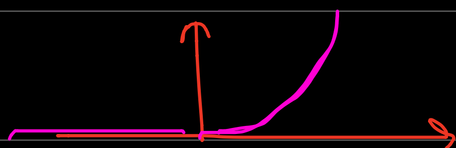
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = 0 & \mathbb{R} \end{cases}$$

ammette una soluzione non nulla data dalla funzione

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \leftarrow \text{serie di potenze in } x$$

dove $g^{(k)}(t)$ é la derivata k-esima della funzione

$g(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$.



$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & t > 0 \end{cases}$$

é di classe C^∞.

OSSERVAZIONE: A livello formale abbiamo:

$$u_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

$$u_x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

$$u_t - u_{xx} = 0$$

e $$u_{xx} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k-2)!} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

In realtà possiamo usare una qualunque funzione g di t di classe C^∞. Il problema é fare convergere la serie e le serie delle derivate.

LEMMA: Esiste $\theta \in (0,1)$ tale che, per ogni $t>0$ e $k \in \mathbb{N}$

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2t^2}}$$

Dando per buono il lemma, dimostriamo il teorema

$$f_k(t,x) =: \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\frac{k!}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \leftarrow \frac{\cancel{k!}}{2k(2k-1)\cdots\cancel{k!}} \leq \frac{1}{k!}$$

Abbiamo $|f_k(t,x)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2t^2}} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{\theta t}\right)^k e^{-\frac{1}{2t^2}}$

se fissiamo t abbiamo una maggiorazione con la serie convergente la cui somma è $e^{\frac{x^2}{\theta t}} \cdot e^{-\frac{1}{2t^2}}$

Dunque la serie di potenze in x ha raggio di convergenza infinito e in più

$$|u(t,x)| \leq e^{-\frac{1}{2t^2}+\frac{x^2}{\theta t}}$$

per $t \to 0^+$ questo converge puntualmente a zero e uniformemente su ogni compatto di $\mathbb{R}$. Inoltre la serie è derivabile termine a termine rispetto a x.

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = 0 \quad \forall x$$

Dobbiamo ora studiare la derivabilità rispetto a t.

TEOREMA: Se $F_k(t) \in C^1(I)$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(t)$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k'(t)$ convergono uniformemente in I, allora $\sum_k F_k(t)$ è derivabile e risulta $\left(\sum_k F_k\right)' = \sum_k F_k'$.

Applichiamo il teorema di derivazione termine a termine in un intervallo $[a,b]$ con $0<a<b<+\infty$. Abbiamo (x è fissato)

a x fissato $F_k(t) =: \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$

$$|F_k(t)| \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{\theta t}\right)^k e^{-\frac{1}{2t^2}} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{\theta a}\right)^k e^{-\frac{1}{2b^2}} = C_k$$

è maggiorato da una serie numerica convergente.

Per il criterio di Weierstrass converge uniformemente. Lo stesso si può dire per

$$|F_k'(t)| \leq \frac{(k+1)!}{(\theta t)^{k+1}} e^{-\frac{1}{2t^2}} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \underbrace{\frac{(k+1)!}{(2k)!} \frac{x^{2k}}{(\theta a)^{k+1}}}_{\tilde{C}_k} e^{-\frac{1}{2b^2}}$$

$\sum \tilde{C}_k < +\infty$ criterio del rapporto

converge per il criterio di convergenza uniforme di Weierstrass

$\boxed{\mathbb{Z}}$