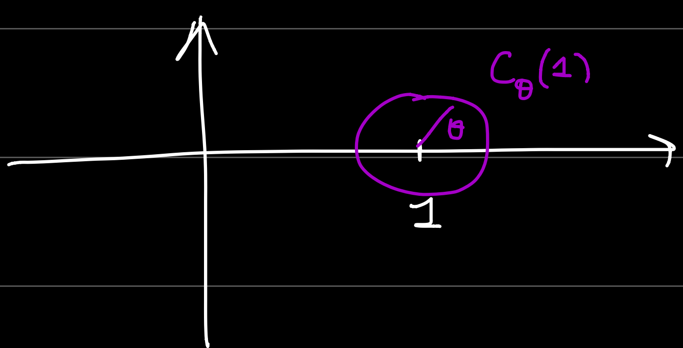
Lemma preliminare: $\exists\, \theta \in (0,1)$ t.c.

$$\boxed{\operatorname{Re} \frac{1}{z^2} > \frac{1}{2t^2} \qquad \forall\, t>0 \quad \forall\, z : \ |z-t| = \theta t}$$

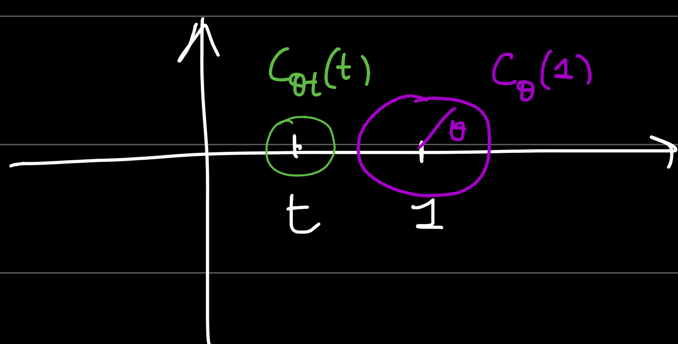
Dimostrazione: Indichiamo, sul piano complesso, con $\gamma = C_r(z_0)$ la circonferenza centrata in z_0 con raggio $r \geq 1$

Notiamo che $\displaystyle \min_{z \in C_0(1)} \operatorname{Re} \frac{1}{z^2} = \operatorname{Re} 1 = 1$

dunque per continuità, $\exists\, \theta \in (0,1)$ tale che $\displaystyle \min_{z \in C_\theta(1)} \operatorname{Re} \frac{1}{z^2} > \frac{1}{2}$



Ora, preso $t>0$, $C_{\theta t}(t)$ é l'immagine omotetica di $C_\theta(1)$



cioé $z \in C_{\theta t}(t) \iff \frac{z}{t} \in C_\theta(1)$. Dunque

$$\min_{z \in C_{\theta t}(t)} \operatorname{Re} \frac{1}{z^2} = \frac{1}{t^2} \min_{z/t \in C_\theta(1)} \frac{1}{\left(\frac{z}{t}\right)^2} > \frac{1}{2t}$$

LEMMA: Esiste $\theta \in (0,1)$ tale che, per ogni $t > 0$ e $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2t^2}}}$$

dove $g^{(k)}(t)$ é la derivata k-esima di $e^{-\frac{1}{t^2}}$

Dimostrazione - Ci avvaliamo di un risultato fondamentale dell'analisi complessa. Estendiamo g nel campo complesso privato dello zero, ponendo

$$\boxed{g(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

g é una funzione olomorfa (= derivabile in senso complesso)
Di conseguenza abbiamo a disposizione, per ogni $k \in \mathbb{N}$, la formula di Cauchy:

$$\boxed{g^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz}$$

dove γ é una qualunque circonferenza centrata in z_0 e contenuta in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. In particolare possiamo scegliere come cammino di integrazione $C_{\theta t}(t)$:

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-t)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \mathcal{L}(\gamma) \max_{z \in \gamma} \left| \frac{g(z)}{(z-t)^{k+1}} \right|$$

$\mathcal{L}(\gamma) =$ lunghezza $C_{\vartheta t}(t) = 2\pi\vartheta t$

Abbiamo infine

$$\left| \frac{g(z)}{(z-t)^{k+1}} \right| = \frac{\left|e^{-\frac{1}{z^2}}\right|}{|z-t|^{k+1}} = \frac{e^{Re\left(-\frac{1}{z^2}\right)}}{(\vartheta t)^{k+1}} = \frac{e^{-Re\left(\frac{1}{z^2}\right)}}{(\vartheta t)^{k+1}}$$

$$\leq \frac{e^{-\frac{1}{2t^2}}}{(\vartheta t)^{k+1}}$$

Dunque

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\vartheta t)^k} e^{-\frac{1}{2t^2}} \qquad \blacksquare$$

EQUAZIONE DEL CALORE SU DOMINI LIMITATI

Ω dominio limitato e regolare di $\mathbb{R}^n$, consideriamo il cilindro parabolico $\Omega_T = (0,T] \times \Omega$ e Γ_T la frontiera parabolica, di modo che $\overline{(0,T) \times \Omega} = \Omega_T \cup \Gamma_T$.

Consideriamo lo spazio $C_1^2(\overline{\Omega_T})$ delle funzioni u che ammettono derivate parziali $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} : \Omega_T \to \mathbb{R}$ e tutte (u compresa) si estendono per continuità su $\overline{\Omega_T}$.

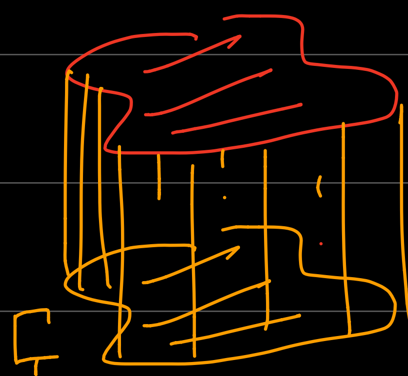
Abbiamo il seguente teorema di unicità sui domini limitati

TEOREMA: $f \in C(\overline{\Omega}_T)$, $g \in C(\Gamma_T)$ — Allora il problema

$$(P_T) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f & \Omega_T \\ u = g & \Gamma_T \end{cases}$$

ha al più una soluzione in $C^2_1(\overline{\Omega}_T)$.

Dimostrazione: Supponiamo che u_1 e u_2 siano due soluzioni di (P_T), e poniamo $v = u_1 - u_2$ — $v \in C^2_1(\overline{\Omega}_T)$ risolve il problema omogeneo



$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \Omega_T \\ v = 0 & \Gamma_T . \end{cases}$$

Consideriamo

$$e(t) = \int_\Omega v^2(t,x)\,dx \geq 0$$

vorremmo dimostrare che $e(t) \equiv 0$ $\forall t \in [0,T]$ — Sappiamo che $e(0) = 0$, e che $e(t) \geq 0$ (ovviamente) — Ora dimostriamo che e é una funzione non crescente in t:

$$e'(t) = \int_\Omega \partial_t v^2(t,x)\,dx = 2\int_\Omega v\, v_t\, dx$$

$$= 2\int_\Omega v\Delta v = 2\int_\Omega 2v\,\mathrm{div}(\nabla v) = 2\int_\Omega \left[\mathrm{div}(v\nabla v) - |\nabla v|^2\right] dx$$

$$= 2\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma - 2\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

$$= -2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 0$$

Quindi $e(t) \leq e(0)$ $\forall t \in (0,T] \Rightarrow v \equiv 0$ su Ω_T. $\blacksquare$

OSSERVAZIONE:

Il metodo dell'energia ha un vasto spettro di azione: per esempio, possiamo considerare problemi con condizioni al bordo di $\partial\Omega$ del tipo:

$$(PD)\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \Omega_T \\ u(0,x) = u_0 & \{0\}\times\Omega \\ u(t,x) = g(x) & [0,T]\times\partial\Omega \end{cases}$$

o anche problemi di Neumann

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \Omega_T \\ u(0,x) = u_0 & x \in \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & [0,T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

(basta ripercorrere la dimostrazione sopra)

Inoltre funziona anche in presenza di termini di grado 0 (e uno) e coefficiente limitato

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \overset{\downarrow}{c(x,t)} u + f & \Omega_T \\ u(0,x) = u_0 & \Omega \\ u(t,x) = g & [0,T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

Infatti nell'espressione di $e'(t)$ compare un termine

$$e'(t) = 2\int_\Omega v v_t = \dots - \int_\Omega 2|\nabla v|^2 + 2c(x)v^2 \leq 2|c|_\infty \int_\Omega v^2$$

dunque otteniamo $e'(t) - 2|c|_\infty e(t) \leq 0$, cioè

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2|c|_\infty t} e(t)\right) \leq 0 \Rightarrow e(t) \leq e(0)\, e^{2|c|_\infty t}$$

Si possono anche aggiungere all'operatore dei termini di grado 1: $u_t - \Delta u = b(x,t) \cdot \nabla_x u + c(x,u)\, u + f$

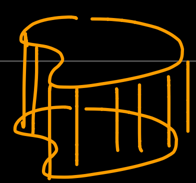
$$\le -\int_\Omega |\nabla u|^2 + |b|_{L^\infty}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\Big)^{1/2}\sqrt{e(t)} + |c|_\infty e(t) \le -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \Big(\frac{|b|_\infty}{2} + |c|_\infty\Big) e(t)$$

$$\frac{1}{2|b|_\infty}\int |\nabla u|^2 + \frac{|b|_\infty}{2} e(t)$$

Un risultato di unicità per l'equazione retrograda

<u>TEOREMA</u> – Sia $g \in C([0,T]\times\partial\Omega)$ e siano $u_1, u_2 \in C^2_1(\overline{\Omega_T})$ due soluzioni di

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{in } [0,T]\times\Omega \end{cases}$$



se $u_1(T,x) = u_2(T,x)$ $\forall\, x\in\Omega \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ in Ω_T

Dimostrazione: Al solito, poniamo $v = u_1 - u_2$ e consideriamo

$$e(t) = \int_\Omega v^2(t)$$

Ora ci manca l'informazione che $e(0)=0$. Calcoliamo

$$e''(t) = \frac{d}{dt}\, -2\int_\Omega |\nabla v|^2 = -4\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v_t\, dx$$

$$= 4\int_\Omega \Delta v\, v_t - 4\int_{\partial\Omega} v_t \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma$$

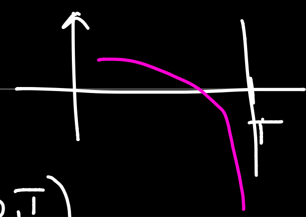
$$= 4\int_\Omega (\Delta v)^2$$

Inoltre osserviamo che

$$(e'(t))^2 = 4\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^2 = 4\left(\int_\Omega v\,\Delta v\, dx\right)^2 \le 4\int_\Omega v^2 dx \int_\Omega (\Delta v)^2 dx$$

$$= e(t)\,e''(t)$$

Prendiamo la funzione $\log(e(t)) = f(t)$



si tratta di una funzione non crescente su $[0,T)$

e so che $\lim_{t\to T^-} f(t) = -\infty$.

D'altra parte, $f'(t) = \dfrac{e'(t)}{e(t)} \le 0 \qquad f''(t) = \dfrac{e''(t)e(t) - (e'(t))^2}{(e(t))^2} \ge 0$

Quindi $f'(t)$ é limitata dal basso (e dall'alto) e

f non può tendere a $-\infty$ per $t \to T^-$. $\boxtimes$