IDENTITÀ DI STOKES

Sia Ω un dominio limitato e regolare di $\mathbb{R}^n$.

Sia f una funzione di classe $C^2(\bar{\Omega})$. Allora $\forall x \in \Omega$ abbiamo

$$\boxed{f(x) = -\int_\Omega \overset{\Gamma(y-x)}{\overset{\shortparallel}{G^x}}(y)\,\Delta f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \left[f(y)\frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y) - G^x(y)\frac{\partial f}{\partial \nu}(y) \right] d\sigma_y}$$

INTERPRETAZIONE FISICA DELLA FORMULA DI STOKES

Per il principio di sovrapposizione, una distribuzione di carica ρ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ genera un potenziale elettrostatico

$$\boxed{U(x) = \int_\Omega G^x(y)\,\rho(y)\,dy}$$

In modo simile, una distribuzione di carica su una superficie Σ con densità superficiale $\rho : \Sigma \to \mathbb{R}$ genera un potenziale

$$\boxed{V(x) = \int_\Sigma G^x(y)\,\rho(y)\,d\sigma_y}$$

detto potenziale di strato semplice.

Anche una distribuzione di dipoli genera un potenziale

Detta ρ la densità di carica del dipolo

$$\boxed{W(x) = \int_{\Sigma} \frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y)\,\rho(y)\,d\sigma_y}$$

detto potenziale di doppio strato.

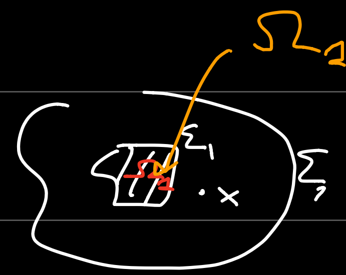
Dunque l'identità di Stokes esprime il fatto che il potenziale elettrostatico è la somma del potenziale di volume (densità di carica $-\Delta u$), e di un potenziale di strato semplice e di uno di doppio strato

$$f(x) = -\int_{\Omega} G^x(y)\,\Delta f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \left[f(y)\,\frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y) - G^x(y)\,\frac{\partial f}{\partial \nu}(y) \right] d\sigma_y$$

Nel caso del condensatore abbiamo

$$f(x) = \underbrace{-\int_{\Sigma_1} \frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y)\,d\sigma_y}_{=0} + \int_{\partial\Omega} G^x(y)\,\frac{\partial f}{\partial \nu}(y)\,d\sigma_y$$

$= 0$ perché G^x è armonico su in Ω_1



$$\Delta_y G^x = 0 \Rightarrow 0 = \int_{\Omega_1} \Delta_y G^x\,dx = \int_{\Omega_1} \mathrm{div}(\nabla_y G^x) = \int_{\Sigma_1} \nabla_y G^x \cdot \nu = 0$$

EQUAZIONE DI POISSON SU UN DOMINIO LIMITATO CON

DATO C^2

TEOREMA: Dato un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, per ogni $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, la funzione

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y)\,dy = \int_\Omega G^x(y) f(y)\,dy$$

sta in $C(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega)$ e verifica $-\Delta u = f$ in Ω.

FUNZIONI ARMONICHE E LORO PROPRIETÀ

- FUNZIONI ARMONICHE E FUNZIONI OLOMORFE

$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \qquad (x,y) \longmapsto z = x+iy$.

Definizione: $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é differenziabile in senso complesso in $z_0 \in \Omega$ se esiste il

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \left(= f'(z_0)\right)}$$

Una funzione differenziabile in senso complesso in tutti i punti $z_0 \in \Omega$ si dice olomorfa in Ω.

CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN: Scriviamo

Proposizione:

$$f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y) \Longleftrightarrow T(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$$

$z_0 = x_0 + i y_0$ - f é differenziabile in senso complesso in $z_0 \Longleftrightarrow T$ lo é in senso reale e valgono le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

In particolare:

$$|T_x|^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + u_y^2 = |T_y|^2$$ e

$$T_x \cdot T_y = \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ -u_x \end{bmatrix} = 0$$

La matrice Jacobiana di T é

$$J_T(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

é multiplo di una matrice ortogonale con determinante positivo.

TEOREMA: Sia Ω un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^2$

(i) Se $f : \Omega \to \mathbb{C} : z \mapsto u + iv$ é una funzione olomorfa allora u e v sono funzioni armoniche in Ω

(ii) Se Ω é semplicemente connesso e $u \in C^2(\Omega)$ é una funzione armonica allora esiste una funzione armonica v tale che $f = u + iv$ é una funzione olomorfa in Ω. (v é detta armonica coniugata di u)

Dimostrazione: (i) Sappiamo che una funzione olomorfa é in realtà di classe C^∞, $u, v \in C^\infty(\Omega)$ - Calcoliamo, usando le condizioni di Cauchy-Riemann

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Analogamente

$$v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

$\Delta u = \Delta v = 0$.

(ii) Data $u \in C^2$ con $\Delta u = 0$, vogliamo trovare v tale che $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$ - Nei fatti vogliamo trovare un potenziale del campo $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} -u_y \\ u_x \end{bmatrix}$ (o della forma differenziale $\omega = -u_y dx + u_x dy$) - $\omega = dv$?

Se Ω é un aperto semplicemente connesso, una condizione necessaria e sufficiente é l'irrotazionalità del campo $\text{rot}\,\vec{F} = 0 \iff (F_1)_y - (F_2)_x = 0 \iff -u_{yy} - u_{xx} = 0$.

(alternativamente, $d\omega = (-u_{yy} - u_{xx}) dx \wedge dy = 0$).

OSSERVAZIONE: Sia $z \mapsto z^k$ con $k \in \mathbb{N}$. Allora

$\frac{d}{dz} z^k = k z^{k-1}$

le parti reali e immaginarie sono polinomi armonici omogenei di grado k. $u(\lambda x) = \lambda^k u(x) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

ESEMPIO: $k=2 \mapsto z^2 = x^2 - y^2 + 2i\,xy$

$k=3 \mapsto z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

PROPOSIZIONE: Un polinomio omogeneo di due variabili di grado k è una funzione armonica se e solo se è una combinazione lineare fra le parti reali e immaginarie del monomio z^k.

OSSERVAZIONE: Un polinomio omogeneo in due variabili di grado k è della forma $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + \dots + a_{k-1} x y^{k-1} + a_k y^k$

Dimostrazione: già sappiamo che le parti reali e immaginarie di z^k sono funzioni armoniche e perciò è armonica ogni loro combinazione lineare. Viceversa, sia supponiamo che u sia un polinomio armonico di grado k. Usiamo le coordinate polari e scriviamo $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Se u è omogenea di grado k allora $u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k u(x,y)$.

In particolare $v(r,\theta) = r^k u(\cos\theta, \sin\theta) = r^k \varphi(\theta)$.

Scriviamo il Laplaciano in coordinate polari

$$\boxed{v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = \Delta u} \quad (\text{Esercizio!!!})$$

In altre parole,

$$k(k-1) r^{k-2}\varphi + k r^{k-2}\varphi + r^{k-2}\varphi'' = 0 \qquad (\cdot)' = \frac{d}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi''(\theta) = -k^2\varphi(\theta) \\ \varphi(\theta+2\pi) = \varphi(\theta) \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \varphi(\theta) = A\cos k\theta + B\sin k\theta \quad \text{e}$$

$$v(r,\theta) = A r^k \cos k\theta + B r^k \sin k\theta$$

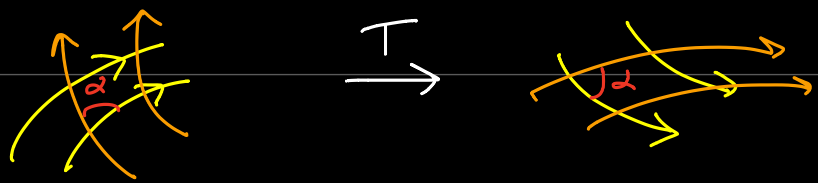
Ricordiamo che $z^k = r^k \cos k\theta + i r^k \sin k\theta$ (formula di de Moivre).

INVARIANZA CONFORME IN DIMENSIONE 2

Definizione: Una funzione $T : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe

C^1 si dice conforme se $\forall x \in \Omega$, $J_T(x)$ é multiplo di una matrice ortogonale.

<u>OSSERVAZIONE 1.</u> Le mappe conformi conservano gli angoli



<u>OSSERVAZIONE 2.</u> In dimensione $n=2$ le relazioni di conformalità si esprimono come $\left(T(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \right.$

$$J_T = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \lambda(x,y)\, O(x,y),$$

dove O é una matrice ortogonale. In particolare abbiamo $|T_x|^2 = |T_y|^2$ e $T_x \cdot T_y = 0$. Supponiamo che $\det J_T > 0$.

Allora $J_T = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$, cioé valgono le condizioni di Cauchy-Riemann

<u>Definizione</u>: Due domini Ω_1 e Ω_2 di $\mathbb{R}^2$ si dicono <u>conformemente equivalenti</u> se esiste un diffeomorfismo $T: \Omega_1 \to \Omega_2$ conforme (cioé tale che $|T_x|^2 = |T_y|^2$ e $T_x \cdot T_y = 0$)

PROPOSIZIONE: Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti di $\mathbb{R}^2$ conformemente equivalenti mediante un diffeomorfismo T. Siano $u : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ e $v : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ tali che $u = v \circ T$ allora u é armonica se e soltanto se lo é v.

Dimostrazione: operando se necessario una riflessione possiamo ricondurci al caso in cui il $\det J_T > 0$. Chiamiamo $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ la funzione olomorfa corrispondente.

Sia $D \subset \Omega_1$ un disco e $\tilde{D} = f(D) \subseteq \Omega_2$. Supponiamo che v sia una funzione armonica. Sia $w : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ tale che $g = v + iw$ é una funzione olomorfa.

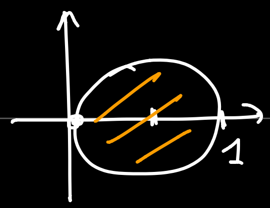
Allora $u = \operatorname{Re}(g \circ f)$ é la parte reale di una funzione olomorfa $\Rightarrow$ é armonica.

composta di funzioni olomorfe $\Rightarrow$ é olomorfa.

ESERCIZIO: Dimostrare la proposizione direttamente, mediante la derivazione successiva della funzione composta verificando che $\Delta v(x,y) = (|T_x|^2 + |T_y|^2)\, \Delta u(T(x,y))$

TEOREMA DELLA MAPPA DI RIEMANN: Ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso e diverso da $\mathbb{R}^2$ è conformemente equivalente al disco unitario.

ESEMPIO:



$$T(z) = \frac{1}{z}$$