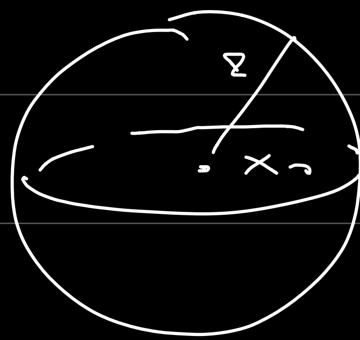
MEDIE SFERICHE



$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < r \}$$

$$S_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = r \} = \partial B_r$$

Volume della palla $|B_r(x_0)| = r^n |B_1(0)|$

Superficie sferica $|S_r(x_0)| = r^{n-1} |S_1(0)|$

Teorema della divergenza applicato a $\vec{F}(x) = x$

$$\int_{B_1(0)} \mathrm{div}(x)\, dx = \int_{S_r(0)} x \cdot \nu \, d\sigma_x = |S_1(0)|$$

$$\int_{B_1(0)} \mathrm{div}(x)\, dx = n |B_1(0)|$$

$$\Rightarrow \quad n |B_1(0)| = |S_1| \qquad \boxed{|B_1(0)| = \omega_n}$$

CALCOLO DEL VOLUME DELLA PALLA n-dimensionale

Introduciamo la funzione Γ di Eulero

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx \qquad t > 0$$

PROPOSIZIONE

$$\boxed{\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}}$$

Dimostrazione:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n = \qquad \times$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-x_i^2} dx_1 \cdots dx_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2} dx_i = \pi^{\frac{n}{2}}$$

$n=2$ $\quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\, dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \boxed{r\, dr}$

D'altra parte, coord. polari

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{S_r} e^{-|x|^2} d\sigma \right) dr = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} |S_r| \, dr$$

$|S_r| = r^{n-1} |S_1|$

$$= |S_1| \int_0^{+\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{n\, \omega_n}{2} \int_0^{+\infty} s^{\frac{n}{2}-1} e^{-s} ds$$

$r^2 = s \qquad 2r\,dr = ds$

$$= \frac{n}{2} \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \pi^{\frac{n}{2}} = \frac{n\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

Infatti si ha $\forall t>0$

$$\boxed{\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)}$$

Per verificarlo, calcoliamo

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t \underbrace{e^{-x}}_{= -\frac{d}{dx} e^{-x}} dx \overset{p.p.}{=} - x^t e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} t x^{t-1} e^{-x} dx = t\,\Gamma(t).$$

Inoltre sappiamo che

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma(k) = k\,\Gamma(k-1) = \dots = k!\,\Gamma(1) = k!$$

$$\int^{+\infty} e^{-s^2} \dots$$

$2\int_0 e\, ds$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x}\,dx \quad = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$x = s^2 \qquad dx = 2s\,ds$$

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}}$$

In definitiva

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\pi^k}{k!} \qquad \text{se } n = 2k \qquad (\text{pari})$$

$$\omega_n = \frac{\pi^{k-1}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}} \qquad \text{se } n = 2k-1 \quad (\text{dispari})$$

$$n = 2 \Rightarrow \omega_2 = \pi \qquad |S_1^n| = n\,\omega_n = 2\pi$$

$$n = 3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{\pi}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3} \qquad |S_1^n| = 3\,\omega_n = 4\pi$$

OSSERVAZIONE: Nell'integrazione abbiamo usato il fatto che

$$\int_{B_R(x_0)} f(x)\,dx = \int_0^R \left(\int_{S_r(x_0)} f(x)\,d\sigma_x\right) dr =$$

Formula di coarea $\qquad x = x_0 + r y$

$$= \int_0^R \int_{S_1(x_0)} f(x_0 + r y)\, r^{n-1}\, d\sigma_y\, dr$$

PROPOSIZIONE: $\displaystyle \frac{d}{dr}\int_{B_r(x_0)} f(x)\,dx = \int_{\partial B_r(x_0) = S_r(x_0)} f(x)\,d\sigma_x \qquad \forall\, r \in (0,R)$

per ogni funzione $f \in C^1(B_R)$.

Dimostrazione
$$\int_{B_r(x_0)} f(x)\,dx = \int_{B_1(0)} f(x_0+ry)\,r^n\,dy$$

avendo posto $x = x_0 + r y$.

$$\frac{d}{dr}\left(r^n \int_{B_1(x_0)} f(x_0+ry)\,dy\right) = n r^{n-1} \int_{B_1(x_0)} f(x_0+ry)\,dy +$$

$$+\, r^n \int_{B_1(x_0)} \nabla f(x_0+ry)\cdot y\,dy$$

ora poniamo $\vec{F}(y) = f(x_0+ry)\,y$ e osserviamo che

$\mathrm{div}_y \vec{F} = r\nabla f(x_0+ry)\cdot y + n f(x_0+ry)$, di modo che

$$\frac{d}{dr}\left(r^n \int_{B_1(x_0)} f(x_0+ry)\,dy\right) = r^{n-1} \int_{B_1(0)} \mathrm{div}(\vec{F}(y))\,dy$$

$$= r^{n-1} \int_{S_1(0)} \vec{F}(y)\cdot \overset{y}{\overset{\parallel}{\nu}}\,d\sigma_y = r^{n-1} \int_{S_1(0)} f(x_0+ry)\,d\sigma_y$$

$$= \int_{S_r(x_0)} f(x)\,d\sigma_y$$

$\boxtimes$

Integrando la relazione $\frac{d}{dr}\left(\int_{B_r} f(x)dx\right) = \int_{\partial B_r} f(x)d\sigma_x$

fra 0 e R, tenendo conto che $\lim_{r\to 0}\int_{B_r} f(x)dx = 0$, otteniamo

$$\boxed{\int_{B_R} f(x)dx = \int_0^R \int_{\partial B_r} f(x)\,d\sigma_x\,dr}$$

La formula è vera per ogni funzione $f\in C^0(B_R)$

MEDIA SUPERFICIALE E MEDIA VOLUMETRICA

$$⨍_{S_r(x)} f(y)d\sigma_y =: \frac{1}{|S_r(x)|}\int_{S_r(x)} f(y)\,d\sigma_y = \frac{1}{r^{n-1}\,n\omega_n}\int_{S_r(x)} f(y)d\sigma_y$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}\int_{S_1(0)} f(x+ry)\,d\sigma_y$$

$$⨍_{B_r(x)} f(y)dy =: \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(y)dy = \frac{1}{r^n\omega_n}\int_{B_r(x)} f(y)dy$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_{B_1(0)} f(x+ry)dy$$

TEOREMA: Se $f\in C(B_R(x))$ allora

(i) $$\lim_{r\to 0} \fint_{S_r(x)} f(y)\,d\sigma_y = f(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} f(y)\,dx$$

ii) Se inoltre $f \in C^2(B_R)$ allora la funzione

$$\varphi(r) = \fint_{S_r(x)} f(y)\,d\sigma_y$$

é derivabile e risulta

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B_r(x)} \Delta f(y)\,dy$$

Dimostrazione: la parte i) é lasciata per esercizio.

ii) scriviamo

$$\varphi(r) = \fint_{S_r(0)} f(y)\,d\sigma_y = \frac{1}{n\omega_n} \int_{S_1(0)} f(x+ry)\,d\sigma_y$$

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{S_1(0)} \nabla f(x+ry)\cdot y\,d\sigma_y = \frac{1}{n\omega_n} \int_{B_1(0)} \mathrm{div}_y\big(\nabla f(x+ry)\big)\,dy$$

$$= \frac{1}{n\omega_n} \int_{B_1(0)} r\,\Delta f(x+ry)\,dy = \frac{r}{n} \fint_{B_r(x_0)} \Delta f(y)\,dy$$

OSSERVAZIONE: $$\psi(r) =: \fint_{B_r(x)} f(y)\,dy = \frac{1}{r^n\omega_n} \int_{B_r} f(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{r^n\omega_n} \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} f(y)\,d\sigma_y\,ds = \frac{n}{r^n} \int_0^r s^{n-1} \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s} f(y)\,d\sigma_y\,ds = \frac{n}{r^n} \int_0^r s^{n-1}\varphi(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{r^n}\left[s^n \varphi(s) \Big|_0^r - \int_0^r s^n \varphi'(s)\, ds \right] = \varphi(r) - \frac{1}{r^n}\int_0^r s^n \frac{s}{n} \fint_{B_s(x)} \Delta f(y)\, dy$$

$$= \varphi(r) - \frac{1}{n\omega_n}\frac{1}{r^n}\int_0^r s \int_{B_s(x)} \Delta f(y)\, dy\, ds$$

<u>TEOREMA</u>: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $u \in C^2(\Omega)$. Le seguenti proprietà sono equivalenti

(i) u é armonica in Ω

(ii) u verifica la proprietà della media superficiale

$$u(x) = \fint_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma_y \qquad \forall\ \overline{B_r(x)} \subset \Omega$$

(iii) u verifica la proprietà della media volumetrica:

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, d\sigma_y \qquad \forall\ \overline{B_r(x)} \subset \Omega$$

<u>Dimostrazione</u>: Fissato $x \in \Omega$, $r \in (0, d(x, \partial\Omega))$, consideriamo

$$\varphi(r) = \fint_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma_y \qquad \psi(r) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy$$

i) $\Rightarrow$ ii) Infatti se u é armonica abbiamo $\varphi'(r) = 0$

dunque $\varphi(r) = \varphi(s) \quad \forall\ 0 < s < r$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) = \lim_{s \to 0} \varphi(s) = u(x)$$

i) $\Rightarrow$ iii) Infatti, se $\Delta u = 0$ abbiamo $\varphi(r) = \psi(r)$

$\forall r.$

$ii) \Rightarrow i)$ In particolare, $ii) \Rightarrow \varphi \equiv$ costante e quindi

$$\fint_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy = 0 \qquad \forall B_r(x)$$

Ma allora $\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$. Infatti abbiamo

$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0 .$$

$iii) \Rightarrow ii)$ $\psi(r) = u(x) \quad \Rightarrow n\int_0^r s^{n-1} \varphi(s)\, ds = r^n u(x)$,
$\forall r$. Derivando otteniamo

$$n r^{n-1} \varphi(r) = n r^{n-1} u(x) \Rightarrow \varphi(r) = u(x) \quad \forall r \in (0, d(x, \partial\Omega))$$

Esempio: Polinomi armonici

Consideriamo un polinomio armonico in $\mathbb{R}^2$. Sappiamo che è la parte reale di un polinomio complesso. Possiamo scrivere $p(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_m (z-z_0)^k$

$$(z-z_0)^k = r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta)$$

$$\Rightarrow \fint_{S_r(z_0)} (z-z_0)^k d\sigma_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } k \geq 1 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$p(z_0) = a_0 = \fint_{S_r(z_0)} p(z)\, d\sigma_z$$

Lo stesso avviene per la media volumetrica

OSSERVAZIONE: Se $\Delta u \geq 0$ abbiamo $\varphi(r)$ monotono non decrescente $\Rightarrow$ $u(x) = \lim_{r \to 0} \varphi(r) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dy$

(la funzione u si dirà subarmonica)

analogamente $u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy$

REGOLARITÀ DELLE FUNZIONI ARMONICHE

TEOREMA: Dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, se $u \in C(\Omega)$ verifica la proprietà della media (superficiale o volumetrica) allora $u \in C^\infty(\Omega)$. In particolare, le funzioni armoniche sono $C^\infty(\Omega)$.

TEOREMA: Se $u \in C(\Omega)$ ha la proprietà della media superficiale o volumetrica, allora $u \in C^\infty(\Omega)$ ed è una funzione armonica in Ω.

Dimostrazione del teorema di regolarità

Per prima cosa introduciamo una tecnica fondamentale: la regolarizzazione mediante convoluzione.

Definizione: Chiamiamo famiglia regolarizzante, o famiglia di mollificatori, una famiglia $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, con le seguenti proprietà:

i) $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

ii) $\eta_\varepsilon \geq 0$ su $\mathbb{R}^n$

iii) $\mathrm{supp}(\eta_\varepsilon) \subset \bar{B}_\varepsilon$

iv) $\int_{B_\varepsilon} \eta_\varepsilon(x)\,dx = 1$

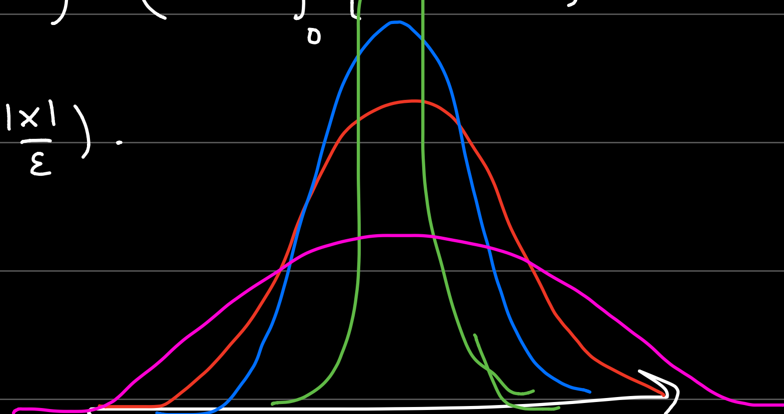
Esempio: Consideriamo la funzione

$$\eta(r) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{r^2-1}} & \text{se } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{se } |r| \geq 1 \end{cases}$$

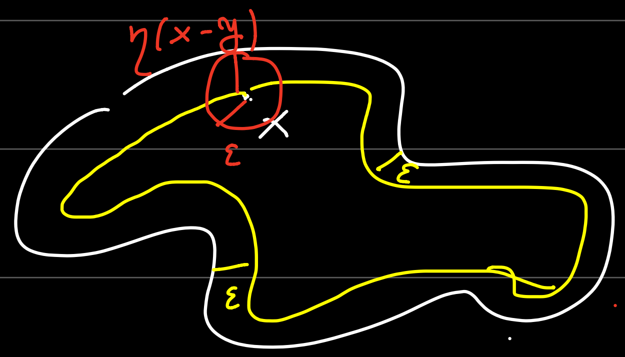
dove $C = C_n = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(|x|)\,dx \right)^{-1} = \left(n\omega_n \int_0^{+\infty} \eta(r) r^{n-1}\,dr \right)^{-1}$

Definiamo $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$.

$\eta(|x|)$



Sia $f_\varepsilon(x) =: \int_{\Omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy$, dove $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$



L'integrale é ben definito.

LEMMA: Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é continua in Ω allora $\forall \varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$

Dimostrazione del lemma. Sia $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ e sia $\delta > 0$ t.c.

$d(x_0, \partial\Omega) + \delta < \varepsilon$. In questo modo $\overline{B_{\varepsilon+\delta}(x_0)} \subset \Omega$ e

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\overline{B_{\varepsilon+\delta}(x_0)}} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy \qquad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

compatto

Si può applicare il teorema di derivazione sotto segno di integrale e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_K \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)\,dy \qquad \forall x \in B_\delta(x_0)$$

Si possono eseguire tutte le derivate che desideriamo.