Principio del massimo di Pontryagin

TEOREMA:

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{in } [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Supponiamo che:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (vettore colonna)
- $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ q.o. in $[0,T]$
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(x,u) \longmapsto f(x,u)$

  é misurabile in u $\forall x$, é di classe C^1 rispetto a x, con $D_x f$ unif. limitato rispetto a u

Supponiamo $(x^*(t), u^*(t))$ sia una soluzione del problema di massimo

$$\boxed{\psi(x^*(T)) = \max\{\psi(x(T)),\ x \text{ é una soluzione di } (1)\}}$$

x^* sia soluzione di (1) con $u = u^*$.

Sia p il vettore riga $\in M(1,n)$, soluzione di

$$(2)\quad \begin{cases} \dot{p}(t) = -\,p(t)\, D_x f(x^*(t), u^*(t)) \\ p(T) = \nabla\psi(x^*(T)) \end{cases}$$

Allora,

$$\langle p(t), f(x^*(t), u^*(t))\rangle = \max_{\omega \in \mathcal{U}} \langle p(t), f(x^*(t), \omega)\rangle$$

per quasi ogni $t \in [0,T]$

Dimostrazione

Useremo questo fatto (differenziazione rispetto al dato iniziale)

$$(PC) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \qquad f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

La soluzione $x(t;\xi)$ dipende da ξ. Sia

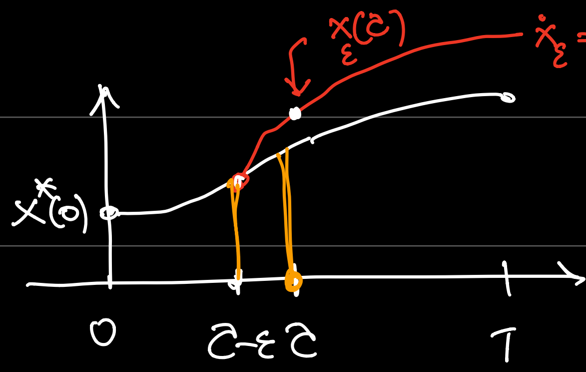
$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = f(t, x_\varepsilon(t)) \\ x_\varepsilon(\tau) = \xi + \varepsilon v^* + o(\varepsilon) \end{cases} \qquad [0,T]$$

Sia $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to} \frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} =: v(t) = \frac{d}{d\varepsilon} x_\varepsilon(t) \quad t \in [0,T]$

Allora $$\begin{cases} \dot{v} = D_x f(t, x(t)) v \\ v(\tau) = v^* \end{cases}$$

Dimostrazione del principio del massimo di Pontryagin:

Torniamo alla dimostrazione $(x^*(t), u^*(t))$ $\quad t\in[0,T]$



$\dot{x}_\varepsilon = f(x_\varepsilon(t),\omega(t))$

$\dot{x}^*(t) = f(t, u^*(t))$

Sia $\omega \neq u^*$ $\quad \omega(t)\in\mathcal{U}$ q.o. e sia x_ε la soluzione di

$$\begin{cases}\dot x_\varepsilon = f(x_\varepsilon(t),\omega(t)) & \text{su } [\tau-\varepsilon,\tau]\\ x_\varepsilon(\tau-\varepsilon)=x^*(\tau-\varepsilon)\end{cases}$$

Vogliamo trovare $\frac{d}{d\varepsilon}x_\varepsilon(\tau)$: $\quad x_\varepsilon(\tau) = x^*(\tau)+\varepsilon\,??+o(\varepsilon)$

$$\frac{x_\varepsilon(\tau)-x^*(\tau)}{\varepsilon} = \frac1\varepsilon\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}(\dot x_\varepsilon(t)-\dot x^*(t))\,dt =$$

$$-f(x^*(t),\omega(t)) + f(x^*(t),\omega(t))$$

$$= \frac1\varepsilon\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\left[f(x^*_\varepsilon(t),\omega(t)) - f(x^*(t),u^*(t))\right]dt$$

$$= \overbrace{\frac1\varepsilon\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\left(f(x^*_\varepsilon(t),\omega(t)) - f(x^*(t),\omega(t))\right)dt}^{I} +$$

$$+ \underbrace{\frac1\varepsilon\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} f(x^*(t),\omega(t)) - f(x^*(t),u^*(t))\,dt}_{II} +$$

(I) in valore assoluto $\leq$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\|f(x^*_\varepsilon(t),\omega(t))-f(x^*(t),\omega(t))\|\,dt\right.$$

$$\leq \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\cancel{\varepsilon}\underbrace{\sup_{(t,)y\in[x^*_\varepsilon(t),x^*(t)]}\|D_x f(y)\|}_{\leq M}\underbrace{\|x^*_\varepsilon(t)-x^*(t)\|}_{\downarrow 0}$$

$\longrightarrow 0$ per $\varepsilon\to 0$

(II) $\cdot$ $\displaystyle\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}[f(x^*(t),\omega(t))-f(x^*(t),u^*(t))]\,dt$

<u>Teorema di differenziazione di Lebesgue</u>: sia $g\in L^1([a,b])$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}g(t)\,dt = g(\tau)$$

é vero per quasi ogni $\tau\in[a,b]$

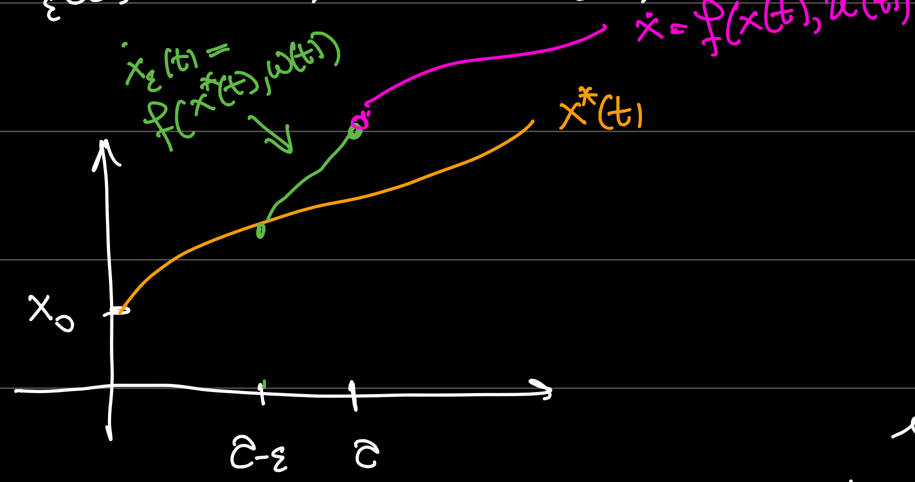
(II) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$, se τ é un punto di Lebesgue per la funzione integranda, $\Longrightarrow$

$$f(x^*(t),\omega(t))-f(x^*(t),u^*(t))$$

Morale: per q.o. $\tau\in[0,T]$ abbiamo

$$v^* =: \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x_\varepsilon(\tau)-x^*(\tau)}{\varepsilon} = f(x^*(t),\omega(t))-f(x^*(t),u^*(t))$$

e dunque $x_\varepsilon(\tau) = x^*(\tau) + \varepsilon v^* + o(\varepsilon)$



Ora, prolunghiamo la soluzione per $t \geq \tau$ ripristinando il controllo u^*:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u^*(t)) & [\tau, T] \\ x(\tau) = x_\varepsilon(\tau) = x^*(\tau) + \varepsilon v^* + o(\varepsilon) \end{cases}$$

Calcoliamo $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x_\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} = v(t)$ per $\boxed{t \in [\tau, T]}$

v é soluzione del problema linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = D_x f(x^*(t), u^*(t))\, v(t) & t \in [\tau, T] \\ v(\tau) = v^* \end{cases}$$

Andiamo a prendere p (vettore riga) soluzione di
$$\begin{cases} \dot{p} = -p\, D_x f(x^*(t), u^*(t)) \\ p(T) = \nabla^T \psi(x^*(T)) \end{cases}$$

e consideriamo $pv = \langle v(t), p^T(t) \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall t$

Osserviamo che pv é costante in $[\tau, T]$. Infatti:

$$\frac{d}{dt} \langle v, p^T \rangle = \langle \dot{v}, p^T \rangle + \langle v, \dot{p}^T \rangle = \langle D_x f(x^*, u^*) v, p^T \rangle$$

$$-\langle v, D_x f(x^*, u^*)^T p^T \rangle = 0$$

Se (x^*, u^*) massimizza $\psi(x(T))$ allora

$$\boxed{\langle v(T), \nabla\psi(x^*(T))\rangle \leq 0}$$

Infatti, $\psi(x_\varepsilon(T)) \leq \psi(x^*(T))$

$$\psi(\underbrace{x^*(T) + \varepsilon v(T)}_{\shortparallel} + o(\varepsilon)) \leq \psi(x^*(T))$$

$$\psi(x^*(T)) + \varepsilon \langle \nabla\psi(x^*(T)), v \rangle + o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \varepsilon \underbrace{\langle \nabla\psi(x^*(T)), v(T)\rangle}_{\leq 0} + o(\varepsilon) \leq 0$$

Quindi $\langle v(T), p^T(T)\rangle \leq 0$. Ma $\langle v, p^T\rangle =$ costante

$$\Rightarrow \langle v(\tau), p^T(\tau)\rangle \leq 0, \quad v(\tau) = v^*$$

Ora

$$0 \geq \langle v^*, p(\tau)^T\rangle = \langle f(x^*(\tau), \omega(\tau)) - f(x^*(\tau), u^*(\tau)), p(\tau)^T\rangle$$

$$\Rightarrow \langle f(x^*(\tau), u^*(\tau)), p(\tau)^T\rangle \geq \langle f(x^*(\tau), \omega(\tau)), p(\tau)^T\rangle$$

per q.o. $\tau \in [0,T]$.

$\boxtimes$

APPLICAZIONE: Le equazioni di Eulero-Lagrange del Calcolo delle Variazioni

Vogliamo minimizzare

$$\int_0^T L(t, x(t), x'(t))\,dt \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

con $x(0) = x_0$ e L convessa nella variabile x'

$x'(t) = u(t)$ $\quad \mathcal{U} = \mathbb{R}^n$. Introduciamo la variabile ausiliaria

$x_0(t) = -\int_0^t L(s, x(s), u(s))\,ds$, e il vettore $\begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix}$. Il sistema dinamico diventa:

$$\begin{cases} x_0' = -L(t, x(t), u(t)) \\ x'(t) = u(t) \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}^n$$

Vogliamo massimizzare $x_0(T)$, cioè $\psi(x_0(T), x(T)) = x_0(T)$

$$\nabla\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad z = \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = f(z, u) \qquad f(z,u) = \begin{bmatrix} -L(t, x, u) \\ u \end{bmatrix}$$

La soluzione del problema aggiunto è il vettore riga $(p_0, p) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$D_z f = \begin{pmatrix} 0 & -L_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \partial/\partial x_0 & \nabla_x \end{array}$$

$$(p_0, p)' = -(p_0, p)\, D_2 f \qquad (p_0(T), p(T)) = (1, 0 0 0)$$

Il sistema aggiunto diventa:

$$\begin{cases} p_0' = 0 & p_0(T) = 1 \Rightarrow p_0(t) \equiv 1 \\ p' = p_0 L_x = L_x & p(T) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione dà $\boxed{p' = L_x}$

Usiamo il principio del massimo:

$$\langle p_0, -L(t, x^*(t), u^*(t)) \rangle + \langle p(t), u^*(t) \rangle$$

$$= \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \left[p_0 \left(-L(t, x^*(t), \omega) \right) + \langle p(t), \omega \rangle \right]$$

Ricordando che $p_0 \equiv 1$

$$-L(t, x^*(t), u^*(t)) + \langle p(t), u^*(t) \rangle \geq -L(t, x^*, \omega) + \langle p, \omega \rangle$$

$\forall \omega \in \mathbb{R}^n$

$$L(t, x^*, \omega) \geq L(t, x^*, u^*) + \langle p(t), \omega - u^*(t) \rangle$$

A t fissato, se u^* massimizza, allora risolve

(derivando rispetto a ω) $\boxed{L_{x'}(t, x^*, u^*) = p(t)}$

In definitiva, per quasi ogni $t \in [0,T]$, abbiamo

$$\frac{d}{dt} D_{x'} L = p' = L_x \qquad \text{equazioni di Eulero-Lagrange}$$

$\boxtimes$

<u>OSSERVAZIONE:</u> Non avendo imposto nessuna condizione finale, abbiamo la condizione aggiuntiva $p(T)=0$, cioè $L_{x'}(x^*(T), x^{*\prime}(T)) = 0$ (condizione di trasversalità)