Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 17 gennaio 2018

Cognome ______________________ Nome ______________________

Numero di matricola ______________________

Voto ______________________

Correzione:

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Voto

Esercizio 1 *(12 punti)* Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ biregolare, p.r.l.a, di curvatura κ_σ. Supponiamo che il sostegno di σ sia contenuto in un piano, e sia $\mathbf{b}_0$ il versore binormale di σ.
Sia $\theta \in [0, 2\pi)$ e consideriamo l'applicazione $\gamma_\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma_\theta(s) = \sigma(s \sin\theta) + s\cos\theta \mathbf{b}_0.$$

(i) Mostrare che γ_θ è una curva regolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(ii) Calcolare la curvatura di γ_θ in funzione di θ e di κ_σ.

(iii) Per $\theta \neq 0, \pi$, mostrare che γ_θ è biregolare e calcolare la sua torsione in funzione di θ e di κ_σ.

(iv) Per quali valori di θ la curva γ_θ è piana?

Esercizio 2 *(10 punti)* Sia $\varphi\colon \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\} \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$\varphi(u, v) = (u^2 v, u^2 + 3v, u^3),$$

e sia S l'immagine di φ in $\mathbb{R}^3$.

(i) Mostrare che S è una superficie regolare.

(ii) Mostrare che per ogni punto $p \in S$ esiste una retta passante per p e contenuta in S.

(iii) Dire se S contiene punti ellittici.

Esercizio 3 *(9 punti)* Consideriamo le forme differenziali su $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha = vdu + 2udv, \qquad \beta = uvdu \wedge dv,$$

e l'applicazione $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $F(x, y, z) = (x \cos y, z \sin x)$.

(i) Calcolare $\omega = F^*\alpha$ e $\eta = F^*\beta$.

(ii) Calcolare $\omega \wedge \eta$.

(iii) Calcolare $d\omega$ e $d\eta$.

(iv) Calcolare $d\omega \wedge dx$.