Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 20 febbraio 2018

Cognome ______________________ Nome ______________________

Numero di matricola ______________________

Voto ______________________

Correzione:

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 1 *(10 punti)* Sia $\sigma_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma_a(t) = (2t - at^3, 3t^2, at^2),$$

dove a è un parametro reale.

(i) Mostrare che σ_a è una curva regolare per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la curva σ_a è biregolare, e per tali valori calcolarne il versore binormale, la curvatura e la torsione.

Esercizio 2 *(10 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3 + 3y^2\}.$$

(i) Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.

(ii) Determinare i punti p di S nei quali il versore normale a S è parallelo al vettore $(0, 16, 1)$, e in tali punti calcolare la curvatura Gaussiana di S.

Esercizio 3 *(11 punti)* Consideriamo la forma differenziale su $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = z dx \wedge dy + y dx \wedge dz.$$

(i) Calcolare la funzione $\omega(X, Y)$, dove X e Y sono i campi vettoriali

$$X = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - 3e^{yz} \frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = (x + 2y) \frac{\partial}{\partial x} + 7x^2 \frac{\partial}{\partial y} - 15 \cos(yz) \frac{\partial}{\partial z}.$$

(ii) Mostrare che ω è chiusa.

(iii) Mostrare che ω è esatta, trovando una primitiva.

(iv) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare e orientabile data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x^2 + y^2 + 9z^2 = 1\}.$$

Fissata un'orientazione per S, calcolare $\int_s \omega$.