Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 12 giugno 2018 - versione 1

Cognome ______________________ Nome ______________________

Numero di matricola ______________________________________

Correzione:

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Voto

Esercizio 1 *(9 punti)* Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $\sigma \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Supponiamo che tutte le rette normali a σ abbiano un punto in comune. Mostrare che il sostegno di σ è contenuto in una circonferenza.

Esercizio 2 *(11 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\}.$$

(i) Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.

(ii) Mostrare che l'applicazione $F \colon S \to S^2$ data da $F(p) = p/||p||$ è un diffeomorfismo tra S e la sfera unitaria.

(iii) Mostrare che S è compatta e connessa, e calcolare l'integrale su S della curvatura gaussiana.

(iv) Sia $\sigma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da $\sigma(t) = g(t)(\cos t, \sin t, 0)$, dove

$$g(t) = \big((\cos t)^4 + (\sin t)^4\big)^{-1/4}.$$

Mostrare che $\sigma(\mathbb{R}) \subset S$ e calcolare $||\sigma'(\pi/4)||$ e $||(F \circ \sigma)'(\pi/4)||$. F è un'isometria?

Esercizio 3 *(11 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2\},$$

e $R \subset S$ la regione regolare

$$R = \{(x, y, z) \in S \mid x \geq 0,\ y \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Orientiamo S in modo tale che il versore normale in $(0,0,1)$ sia $(0,0,1)$ stesso.
Sia infine $\omega = y^2dx + (x-y)dz$. Calcolare $\int_R d\omega$ sia direttamente che con il teorema di Stokes.