Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 14 giugno 2019

COGNOME .... **NOME** ....

Compito n. 1

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (\cos t,\, \sin t,\, \cos at), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana;
2. per ognuno dei valori trovati determinare il piano che contiene la curva;
3. quali delle curve trovate giacciono su una sfera?

Esercizio 2. (4 punti) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Supponiamo che esista un vettore costante non nullo $\mathbf{v}$ tale che

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{v}, \qquad \forall\, s \in I$$

Dimostrare che

$$|k(s)| = |\tau(s)|, \qquad \forall\, s \in I$$

Esercizio 3. (10 punti) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin(x)\, e^y\}$$

1. mostrare che S è una superficie regolare e orientabile;
2. calcolare la curvatura Gaussiana di S e dimostrare che tutti i punti di S sono iperbolici;
3. calcolare la curvatura media di S e determinare i punti di S in cui la curvatura media è nulla;

Esercizio 4. (10 punti) In $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) definiamo la forma

$$\omega = x_3x_4\, dx_1 \wedge dx_2 + x_2x_4\, dx_1 \wedge dx_3 + x_2x_3\, dx_1 \wedge dx_4$$

1. calcolare $d\omega$ e $*\omega$;
2. calcolare $d(*\omega)$ e $\omega \wedge *\omega$;
3. determinare, se esiste, una 1-forma η tale che $d\eta = \omega$.