Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 16 settembre 2019

COGNOME .... **NOME** ....

Compito n. 1

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (t - a\sin t,\, 1 - \cos t,\, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è regolare;
2. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è biregolare;
3. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana e per ognuno dei valori trovati determinare il piano che contiene la curva;

Soluzione. Calcoliamo subito le derivate:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= (1 - a\cos t,\, \sin t,\, 1) \\
\ddot{\alpha} &= (a\sin t,\, \cos t,\, 0) \\
\dddot{\alpha} &= (a\cos t,\, -\sin t, 0) \\
\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} &= (-\cos t,\, a\sin t,\, \cos t - a)
\end{aligned}$$

1. Dal calcolo di $\dot{\alpha}$ si vede che la curva è sempre regolare.
2. Studiamo quando la curva è biregolare: la curvatura è $k(t) = \dfrac{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3}$.

   Se $a \neq 0$, allora $\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}$ è sempre diverso da 0 (le prime due componenti non sono mai contemporaneamente nulle) e quindi $k(t)$ è sempre diversa da 0 e cioè la curva è biregolare.

   Per $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}$ si annulla per $t = \pi/2 + k\pi$ e quindi la curva non è biregolare. Dunque α biregolare se e solo se $a \neq 0$.
3. Quando $a = 0$ si vede subito che la curva diventa $\alpha = (t,\, 1 - \cos t,\, t)$ e quindi sta nel piano $x = z$.

   Nel caso $a \neq 0$ la curva è biregolare e possiamo studiare la torsione: per annullare la torsione basta annullare il numeratore $(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}$. Si ottiene

   $$(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha} = -a\cos^2 t - a\sin^2 t = -a \neq 0$$

e dunque la curva non è piana.

In conclusione, la curva è piana se e solo se $a = 0$ e in questo caso il piano che la contiene è $x = z$.

Esercizio 2. (4 punti) Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura costante $k_0 > 0$ e contenuta in una sfera di raggio $R > 0$, dove $R \geq 1/k_0$. Dimostrare che la curva è piana (e quindi è un arco di circonferenza).

Soluzione. A meno di traslazioni, possiamo supporre che la sfera abbia centro l'origine e dunque $\sigma \cdot \sigma = R^2$. Derivando (due volte) si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma' \cdot \sigma &= 0 \\ \sigma'' \cdot \sigma + \sigma' \cdot \sigma' &= 0 \end{aligned}$$

Ricordando che $\sigma' = \mathbf{t}$, la prima relazione dice che

$$\sigma(s) = A(s)\mathbf{n}(s) + B(s)\mathbf{b}(s)$$

Sostituendo nella seconda e ricordando che $\sigma'' = k_0\mathbf{n}(s)$ e $\sigma' \cdot \sigma' = 1$, si ha

$$A(s) = -1/k_0$$

e cioè $A(s)$ è costante . Usando di nuovo l'equazione della sfera si ha

$$\sigma \cdot \sigma = \frac{1}{k_0^2} + (B(s))^2 = R^2$$

e si ottiene che anche $B(s) = B$ è costante (l'ipotesi $R \geq 1/k_0$ garantisce che questa equazione ha soluzione). Derivando adesso l'espressione di σ e usando le formule di Frenet si ha:

$$\mathbf{t} = \sigma' = -\frac{1}{k_0}\left(-k_0\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}\right) - B\tau\mathbf{n}$$

e poiché $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ formano una base, deve essere $\tau/k_0 = 0$ e quindi $\tau = 0$ e la curva è piana.

Esercizio 3. (10 punti) Sia S la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\mathbf{x}(u,v) = (u + 2v,\ 2u - v,\ uv), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Dimostrare che la parametrizzazione è regolare;
2. Calcolare la curvatura Gaussiana e la curvatura media in tutti i punti di S;
3. Trovare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nell'origine $O = (0,0,0) \in S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Soluzione.

1. La funzione $\mathbf{x}$ è chiaramente differenziabile. Il sistema

$$x = u + 2v, \qquad y = 2u - v$$

ha soluzione

$$u = \frac{1}{5}(x + 2y), \qquad v = \frac{1}{5}(2x - y)$$

e quindi $\mathbf{x}$ è invertibile e l'inversa è continua. Inoltre

$$\mathbf{x}_u = (1,\ 2,\ v)\,, \qquad \mathbf{x}_v = (2,\ -1,\ u)$$

e il prodotto esterno

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (2u + v,\ 2v - u,\ -5)$$

è sempre non nullo e dunque la parametrizzazione è regolare.

2. Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale. La prima forma è data da:

- $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 5 + v^2$
- $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = uv$
- $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 5 + u^2$

e si ha

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 = 25 + 5u^2 + 5v^2 = 5(u^2 + v^2 + 5)$$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (0,0,0) \qquad \mathbf{x}_{uv} = (0,0,1) \qquad \mathbf{x}_{vv} = (0,0,0)$$

Il vettore normale è:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(2u + v,\, 2v - u,\, -5)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5(u^2 + v^2 + 5)}}(2u + v,\, 2v - u,\, -5)$$

e quindi la seconda forma è data da

- $e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0$
- $f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = -\dfrac{5}{\sqrt{5(u^2 + v^2 + 5)}}$
- $g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0$

Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\left(-\dfrac{25}{5(u^2+v^2+5)}\right)}{5(u^2+v^2+5)} = \boxed{-\frac{1}{(u^2+v^2+5)}}$$

Curvatura media:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{0 - 2uv\left(-\dfrac{5}{\sqrt{5(u^2+v^2+5)}}\right) + 0}{5(u^2+v^2+5)}$$
$$= \boxed{\frac{uv}{\sqrt{5}\,(u^2+v^2+5)^{3/2}}}$$

3. Le curvature e le direzioni principali sono gli autovalori e gli autovettori di $-d\mathbf{N}_p$. Ricordiamo la formula

$$-d\mathbf{N}_p = I^{-1} \cdot II$$

L'origine $O = (0,0,0)$ viene ottenuta per i valori $u = 0$, $v = 0$. In questo punto si ha:

$$I(O) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad I^{-1}O) = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \qquad II(O) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$-d\mathbf{N}_O = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 \\ -1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $c_S(\lambda) = \det(S - \lambda I) = \lambda^2 - (1/5)^2$ e quindi le curvature principali sono

$$\boxed{k_1 = 1/5, \qquad k_2 = -1/5}$$

e le relative direzioni principali sono

$$\boxed{\mathbf{e}_1 = (1, -1) = \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v}, \qquad \boxed{\mathbf{e}_2 = (1, 1) = \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v}$$

Esercizio 4. (10 punti) In $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x_1, x_2, x_3) definiamo la forma

$$\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

1. calcolare $d\omega$ e $*\omega$;
2. calcolare $d(*\omega)$ e $\omega \wedge *\omega$;
3. Sia S^2 la sfera di centro l'origine e raggio R. Calcolare $\int_{S^2} \omega$.

Soluzione.

1.

$$\begin{aligned} d\omega &= 3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ *\omega &= x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} d(*\omega) &= 0 \\ \omega \wedge *\omega &= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

3. La sfera S^2 è il bordo della palla piena D^3 di raggio R. Per il teorema di Stokes possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \omega &= \int_{D^3} d\omega \\ &= \int_{D^3} 3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= 3 \cdot \mathrm{vol}(D^3) \\ &= 4\pi R^3 \end{aligned}$$