Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 20 gennaio 2020

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (2e^t,\, e^{at},\, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana;
2. per ognuno dei valori trovati determinare il piano che contiene la curva;
3. posto $a = 2$, determinare la funzione $f(s) = \dfrac{\tau(s)}{k(s)}$.

Soluzione.

1. La curva è biregolare: infatti si ha

$$\begin{aligned}\dot\alpha &= (2e^t,\, ae^{at},\, 1)\\ \ddot\alpha &= (2e^t,\, a^2e^{at},\, 0)\\ \dot\alpha \wedge \ddot\alpha &= (-a^2e^{at},\, 2e^t,\, 2a(a-1)e^{t(1+a)})\\ \dddot\alpha &= (2e^t,\, a^3e^{at},\, 0)\end{aligned}$$

e quindi la curvatura $k(t) = \dfrac{\|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha\|}{\|\dot\alpha\|^3}$ è sempre diversa da 0. Dunque la curva è piana se e solo se la torsione è nulla e basta annullare il numeratore, e cioè il prodotto misto $(\dot\alpha \wedge \ddot\alpha)\cdot\dddot\alpha$. Poiché

$$(\dot\alpha \wedge \ddot\alpha)\cdot\dddot\alpha = -2a^2 + 2a^3e^{t(1+a)} = 2a^2(a-1)e^{t(1+a)}$$

si ottiene $a = 0, 1$.

2. I piani sono $y = 1$ per $a = 0$ (la componente y è costante) e $x = 2y$ per $a = 1$.

3. Per $a = 2$ si ha

$$\|\dot\alpha\wedge\ddot\alpha\| = 2e^t\sqrt{1+4e^{2t}+4e^{4t}}, \quad \|\dot\alpha\| = \sqrt{1+4e^{2t}+4e^{4t}}, \quad (\dot\alpha\wedge\ddot\alpha)\cdot\dddot\alpha = 8e^{3t}$$

e quindi $\dfrac{\tau}{k} = \dfrac{(\dot\alpha \wedge \ddot\alpha)\cdot\dddot\alpha}{\|\dot\alpha\wedge\ddot\alpha\|^2}\cdot\dfrac{\|\dot\alpha\|^3}{\|\dot\alpha\wedge\ddot\alpha\|} = 1$

Esercizio 2. (4 punti) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Supponiamo che

$$k(s) = \tau(s), \qquad \forall\, s \in I$$

Dimostrare che esiste un vettore costante non nullo $\mathbf{v}$ tale che

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{v}, \qquad \forall\, s \in I$$

Dimostrare inoltre che $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{v}$ è costante.

Soluzione. Dalle formule di Frenet si ha

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s) = -\mathbf{b}'(s) \qquad \forall\, s \in I$$

e cioè

$$\mathbf{t}'(s) + \mathbf{b}'(s) = (\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s))' \equiv 0$$

Dunque il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)$ è costante. Calcolando i prodotti scalari si ha:

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t}(s) \cdot (\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)) \equiv 1 \equiv \mathbf{b}(s) \cdot (\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s))$$

ottenendo così la tesi.

Esercizio 3. (10 punti) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, \log(uv)), \qquad (u,v) \in D$$

dove $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0\}$.

1. dimostrare che la parametrizzazione è regolare
2. determinare la curvatura Gaussiana di S
3. calcolare la curvatura normale di S nel punto $p_0 = \mathbf{x}(1,1)$ nella direzione del versore tangente alla curva $\gamma(t) = \mathbf{x}(1+2t, 1-t)$.

Soluzione.

1. la superficie è il grafico di una funzione differenziabile e quindi la parametrizzazione è regolare
2. Le derivate parziali sono:

$$\mathbf{x}_u = \left(1, 0, \frac{1}{u}\right), \qquad \mathbf{x}_v = \left(0, 1, \frac{1}{v}\right)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \left(-\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}, 1\right)$$

Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale. La prima forma è data da:

- $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + \dfrac{1}{u^2}$
- $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \dfrac{1}{uv}$
- $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + \dfrac{1}{v^2}$

e si ha

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 = \frac{u^2v^2 + u^2 + v^2}{u^2v^2} = 1 + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}$$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = \left(0, 0, -\frac{1}{u^2}\right) \qquad \mathbf{x}_{uv} = (0,0,0) \qquad \mathbf{x}_{vv} = \left(0, 0, -\frac{1}{v^2}\right)$$

Il vettore normale è:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(-\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}, 1 \right) \\
&= \frac{uv}{\sqrt{u^2v^2 + u^2 + v^2}} \left(-\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}, 1 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2v^2 + u^2 + v^2}} (-v, -u, uv)
\end{aligned}
$$

e quindi la seconda forma è data da

- $e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -\dfrac{v}{u\sqrt{u^2v^2 + u^2 + v^2}}$
- $f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$
- $g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = -\dfrac{u}{v\sqrt{u^2v^2 + u^2 + v^2}}$

Curvatura Gaussiana:

$$
K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\dfrac{1}{u^2v^2 + u^2 + v^2}}{\dfrac{u^2v^2 + u^2 + v^2}{u^2v^2}} = \boxed{\frac{u^2v^2}{(u^2v^2 + u^2 + v^2)^2}}
$$

3. La curva $\gamma(t)$ passa per il punto $p_0 = (1, 1, 0)$ per $t = 0$. Il vettore tangente è $\gamma'(0) = 2\mathbf{x}_u(1, 1) - \mathbf{x}_v(1, 1) = 2(1, 0, 1) - (0, 1, 1) = (2, -1, 1)$ e dunque $\|\gamma'(0)\| = \sqrt{6}$.

   La curvatura normale si calcola con la seconda forma fondamentale, che nel punto p_0 è

$$
II = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
$$

   Ponendo $\mathbf{u} = \dfrac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|}$ si ha:

$$
\begin{aligned}
k_n(\mathbf{u}) &= II(\mathbf{u}) \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad = -\frac{5}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Esercizio 4. (10 punti) In $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) definiamo la forma

$$\omega = x_3 x_4 \, dx_1 \wedge dx_2 + x_2 x_4 \, dx_1 \wedge dx_3 + x_2 x_3 \, dx_1 \wedge dx_4$$

e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione

$$f(u, v, t) = (uv, u^2, v^2, t^2)$$

1. calcolare $f^*(\omega)$ e $*f^*(\omega)$;
2. calcolare $d(f^*(\omega))$ e $f^*(\omega) \wedge *f^*(\omega)$;
3. calcolare $d\omega$ e $f^*(d\omega)$.

Soluzione.

1.

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= v^2 t^2 d(uv) \wedge d(u^2) + u^2 t^2 d(uv) \wedge d(v^2) + u^2 v^2 d(uv) \wedge d(t^2) \\ &= 2v^2 t^2 u^2 dv \wedge du + 2u^2 t^2 v^2 du \wedge dv + u^2 v^2 (udv + vdu) \wedge 2tdt \\ &= 2u^2 v^2 t (vdu \wedge dt + udv \wedge dt) \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^3$ con coordinate (u, v, t) si ha

$$\begin{aligned} *du \wedge dt &= -dv \\ *dv \wedge dt &= du \end{aligned}$$

e quindi

$$*f^*(\omega) = 2u^2 v^2 t(-vdv + udu)$$

2.

$$\begin{aligned} d(f^*(\omega)) &= d(2u^2 v^3 t) \wedge du \wedge dt + d(2u^3 v^2 t) \wedge dv \wedge dt \\ &= 6u^2 v^2 t \, dv \wedge du \wedge dt + 6u^2 v^2 t \, du \wedge dv \wedge dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(\omega) \wedge *f^*(\omega) &= 4u^4 v^6 t^2 \, du \wedge dt \wedge dv + 4u^6 v^4 t^2 \, dv \wedge dt \wedge du \\ &= (-4u^4 v^6 t^2 + 4u^6 v^4 t^2) \, du \wedge dv \wedge dt \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} d\omega &= d(x_3x_4) \wedge dx_1 \wedge dx_2 + d(x_2x_4) \wedge dx_1 \wedge dx_3 + d(x_2x_3) \wedge dx_1 \wedge dx_4 \\ &= x_3\, dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_4\, dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad + x_2\, dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_4\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\qquad + x_2\, dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4 + x_3\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

poiché i 6 termini si cancellano a due a due. Di conseguenza

$$f^*(d\omega) = 0$$

Quest'ultimo risultato era già calcolato in precedenza, in quanto in generale $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))$