Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 14 febbraio 2020

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (3t^2,\, 1 + 3t,\, at^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

1. Stabilire per quali valori di a la curva è biregolare.
2. Stabilire per quali valori di a la curva è piana.
3. Posto $a = 2$, determinare la curvatura e la torsione in un generico punto di α.

Esercizio 2. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ il suo grafico, con la parametrizzazione regolare $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

Se $P = (u_0, v_0)$ è un punto critico di f, dimostrare che la seconda forma fondamentale di S in $\mathbf{x}(P)$ è uguale all'Hessiano della funzione f in P.

Esercizio 3. (10 punti) Sia S la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u,\, v \sin u,\, u^2), \quad (u, v) \in D$$

1. Determinare D in modo tale che S sia regolare.
2. Trovare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di S.
3. Sia $P = \mathbf{x}(\pi, 0)$. Dimostrare che $\mathbf{u} = \dfrac{1}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \in T_P S$.
4. Calcolare la curvatura normale di S nel punto P nella direzione del versore $\mathbf{u}$.

Esercizio 4. (10 punti) Sia ω la $(n-1)$-forma differenziale su $\mathbb{R}^n$ definita da

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

dove $\widehat{dx_i}$ significa che il termine dx_i non è presente.

1. calcolare $d\omega$ e $*\omega$
2. calcolare $\omega \wedge *\omega$
3. le forma $d\omega$ e $\omega \wedge *\omega$ sono entrambe delle n-forme e perciò sono multiple l'una dell'altra. Determinare il coefficiente di proporzionalità.