Equazioni differenziali del primo ordine

$$u_t + b(t,x,u)\,u_x = c(t,x,u)$$

Metodo delle caratteristiche

$$u(0,x) = g(x)$$

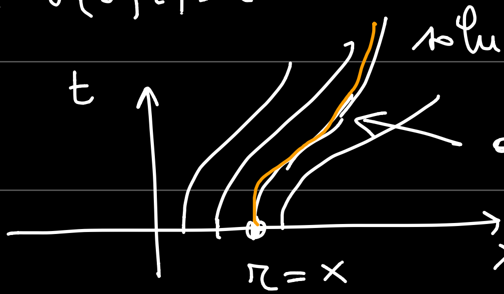
Trasporto "puro" $\quad b(t,x,u) = b(t,x)$

Sistema caratteristico

$$\begin{cases} \dot v(t) = b(t,v) \\ \dot w(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t=0 \quad \text{dato iniziale} \\ \boxed{v(0,r) = r} \\ w(0,r) = g(r) \end{array}$$

$$w(t,r) = g(r) \qquad \forall t \ \forall r$$

$$\begin{cases} \dot v(t,r) = b(t,v) \\ v(0,r) = r \end{cases}$$



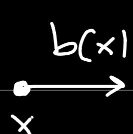
soluzione del pb. di Cauchy

qui la soluz. u è costante e vale $\boxed{u(0,x) = g(x)}$

L'equazione del trasporto

$$u_t + b(t,x)u_x = 0 \quad (= c(t,x))$$

$b = b(t,x)$ campo di velocità



$u_t + b(t,x,u)\,u_x = 0$

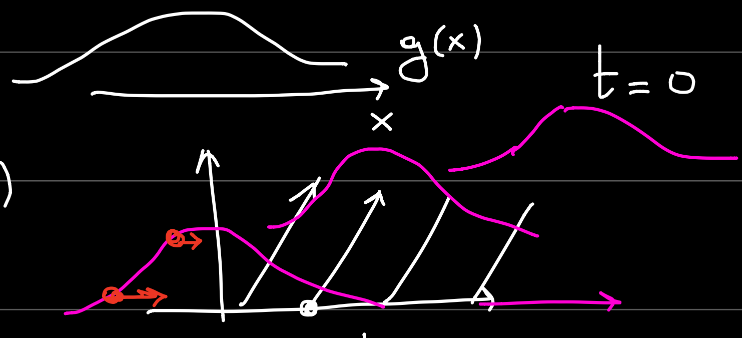
CASO QUASI LINEARE

campo di velocità può dipendere anche da u

Caso coefficienti costanti $\boxed{u_t + u_x = 0}$

$u(0,x) = g(x)$

$u(t,x) = g(x-t)$



$x = t + r$

velocità unitaria

$b u_t + u_x = 0 \qquad u_t + b^{-1} u_x = 0$

$u(0,x) = g(x)$

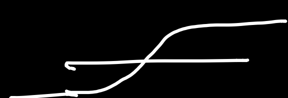
$u(t,x) = g(x - bt)$

EQUAZIONE DI BURGERS:

$$\boxed{u_t + u u_x = 0}$$

Esercizio: Risolvere il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(0,x) = \operatorname{arctg} x \end{cases}$$



Metodo delle caratteristiche:

$$\begin{cases} \dot v = b(t,v,w) \\ \dot w = c(t,v,w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot v = w \\ \dot w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(0,r) = r \\ w(0,r) = g(r) \end{cases}$$

$\boxed{w(t,r) = g(r)}$

$v(t,r) = r + t\,\mathrm{arctg}\, r = r + t g(r)$

$\boxed{x = r + t\,\mathrm{arctg}\, r} \iff r = R(t,x)$ $\boxed{u(t,x) = w(t, R(t,x))}$

a t fissato, occorre che la funzione $r \longmapsto r + t\,\mathrm{arctg}\, r$

sia invertibile (monotona). Per verificare la monotonia,

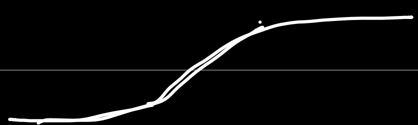
derivo rispetto a r e trovo $1 + \frac{t}{1+r^2} > 0$ $t \geq 0$ O.K.!

$tg'(r) > 0$

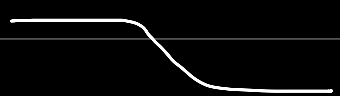
So che $\exists$ $R(t,x)$ tale che $x = r + t\,\mathrm{arctg}\, r \iff r = R(t,x)$

$w(t,r) = g(r)$ $(r + t g(r))' > 0$ per $t \geq 0$

$u(t,x) = g(R(t,x))$



$\mathrm{arctg}\, x = g(x)$



$-\mathrm{arctg}\, x = g(x)$

Se invece $\boxed{g(x) = -\mathrm{arctg}\, x}$

avremmo trovato $\boxed{x = r - t\,\mathrm{arctg}\, r}$ non si può risolve-

re rispetto a r. Almeno non sempre!

La funzione $r \longmapsto r - t\,\mathrm{arctg}\, r$ è monotona se $t \leq 1$

Facendone la derivata (rispetto a r) $1 - \frac{t}{1+r^2} \geq 0$

se $t \in [0,1]$. Non appena $t > 1$ la funzione non è più monotona – Non si può risolvere rispetto a r.

Non possiamo trovare la soluzione u. $u(t,x) = g(R(t,x))$ se $t \le 1$.

Leggi di conservazione scalari unidimensionali

$$\begin{cases} u_t + a(u)\,u_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

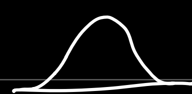
Burgers: $a(u) = u$

$$\boxed{u_t + [F(u)]_x = 0} \qquad F(s) = \frac{1}{2}s^2$$

In dimensione (di x) ≥ 2 $\quad u_t + \operatorname{div}_x[\vec{F}(u)] = 0 \quad \vec{F}(0)=0$

u densità spaziale $\Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u_t(t,x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}[\vec{F}(u)] = 0$

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx$ viene conservato nel tempo.



Caso scalare $n=1$ $\quad \displaystyle\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_t(t,x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} u_t(t,x)\,dx$

$$= -\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} [F(u)]_x\,dx = -\lim_{R\to+\infty}\Big[F[u(t,R)] - F[u(t,-R)]\Big]$$

$= 0$ se u decade a 0 all'infinito e $F(0)=0$.

Conservazione (nel tempo) di $\int_{\mathbb{R}} u \longrightarrow$ conservazione della massa

Risolviamo l'equazione con il metodo delle caratteristiche

$$\begin{cases} \dot{v} = a(w) & v(0,r) = r \\ \dot{w} = 0 & w(0,r) = g(r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(t,r) = a(g(r))t + r \\ w(t,r) = g(r) \end{cases}$$

Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\boxed{x = a(g(r))t + r} \overset{?}{\Longrightarrow} r = R(t,x)$$

rispetto a r

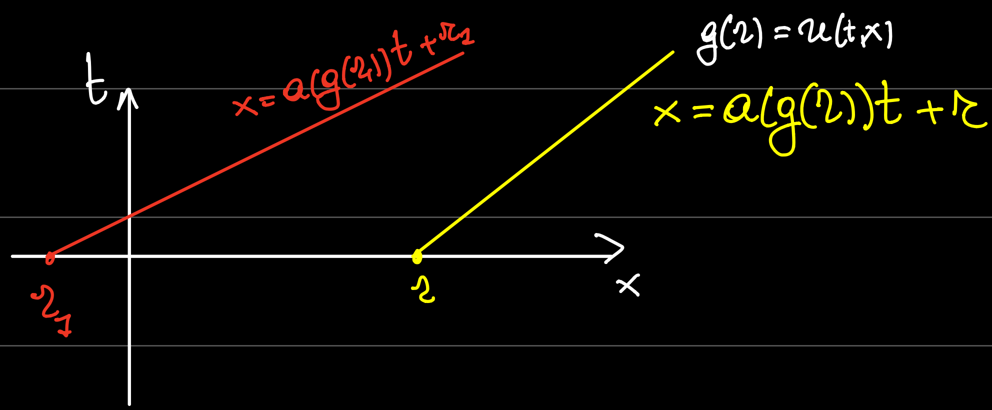
$$\begin{cases} u(t,x) = g(r) & \leftarrow g(R(t,x)) \\ x = a(g(r))t + r & \longrightarrow r = R(t,x) \end{cases}$$

$$\boxed{u(t,x) = g(x - \underbrace{a(u(t,x))}_{\text{velocità di propagazione}}t)}$$

soluzione in forma implicita

Semirette caratteristiche $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \ni (t,x)$

$$\rho(r) = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid x = a(g(r))t + r \}$$ a r fissato



I problemi nascono quando due semirette caratteristiche si incontrano. In quel caso occorre che $g(r_1) = g(r)$

In quel caso occorre che $g(r_1) = g(r_2)$

Proposizione: Se il problema ($a, g \in C^1$) $\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$

ammette una soluzione u definita $(0,T) \times \mathbb{R}$, allora $\forall\, (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}$ passa una e una sola semiretta caratteristica. Inoltre, se $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}$ sta sulla semiretta caratteristica $\rho(r)$ allora

$$\boxed{u_x(t,x) = \frac{g'(r)}{1 + a'(g(r))g'(r)t}}$$

Dimostrazione Supponiamo che $(t,x) \in \rho(r_1) \cap \rho(r_2)$

$$\begin{cases} u(t,x) = g(r_1) \\ x = a(g(r_1))t + r_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t,x) = g(r_2) \\ x = a(g(r_2))t + r_2 \end{cases}$$

$$r_1 - r_2 = [x - a(g(r_1))t] - [x - a(g(r_2))t] = [x - a(u(t,x))t] -$$

$$- [x - a(u(t,x))t] = 0$$

$\Rightarrow \rho(r_1) = \rho(r_2)$.

Se ora prendiamo l'espressione implicita:

$$u(t,x) = g(x - a(u(t,x))t)$$

e deriviamo rispetto a x:

$$u_x(t,x) = g'(x-a(u(t,x))t)\left[1 - a'(u(t,x))t\,u_x(t,x)\right]$$

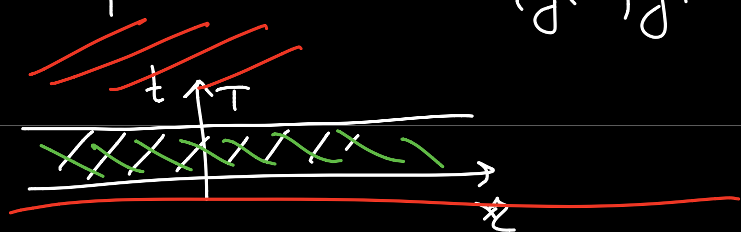
raccogliamo $u_x(t,x)$ e otteniamo l'eguaglianza.

Osservazione: Perché esista una soluzione $C^1([0,c)\times\mathbb{R})$ occorre che

$$\boxed{1 + a'(g(r))\,g'(r)\,t \neq 0} \quad \forall (t,r)\in[0,c)\times\mathbb{R}$$

Definiamo

$$T = \{ t>0 : 1+a'(g(r))g'(r)t = 0 \text{ per qualche } (t,r)\in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\}$$



$$\boxed{t^* = \begin{cases} +\infty & \text{se } T=\emptyset \\ \inf T & \text{se } T\neq\emptyset\end{cases}}$$

Sappiamo che la soluzione esiste come funzione C^1 in $[0,t^*)\times\mathbb{R}$. Ma appena fuori $t>t^*$ c'è sicuramente una singolarità

Proposizione Se g è limitata $\in C^1$ e $t^*>0$ ($t^*\in(0,+\infty]$) allora il problema $\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0 \\ u(0,x) = g(x)\end{cases}$ ammette una (unica) soluzione $C^1([0,t^*)\times\mathbb{R})$

Dim: per esercizio. Riflessione: perché chiedo che g sia limitata?

Proposizione: Supponiamo che g sia C^1 limitata. Le semirette caratteristiche non si intersecano mai se e soltanto se $r \mapsto a(g(r))$ è monotona non decrescente. In tale caso il problema $\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$ ammette una (sola) soluzione su $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Dimostrazione: dati r_1 e r_2 le semirette caratteristiche corrispondenti si intersecano se

$$r_2 - r_1 = t\,[a(g(r_1)) - a(g(r_2))] \qquad (\text{con } t > 0)$$

$$\frac{1}{t} = \frac{a(g(r_1)) - a(g(r_2))}{r_2 - r_1} > 0$$

se invece $\frac{a(g(r_1)) - a(g(r_2))}{r_2 - r_1} \leq 0 \quad \forall\, r_1 r_2 \quad r_1 \neq r_2$

$\Rightarrow \rho(r_1) \cap \rho(r_2) = \emptyset$. Ma ciò equivale a dire che $r \mapsto a(g(r))$ è non decrescente e quindi

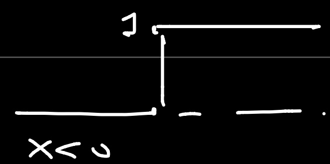
$1 + t\,a'(g(r))\,g'(r) \geq 1 > 0$.

$\Rightarrow t^* = +\infty$.

ESEMPIO

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

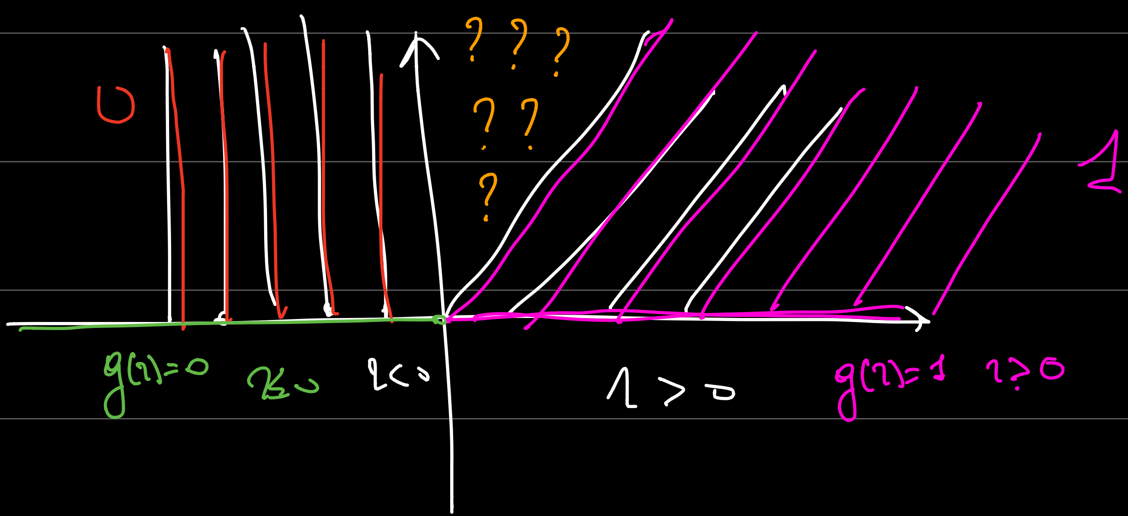
(I) $g(x) = \text{segno}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} \dot v = w \\ \dot w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(0,r) = r \\ w(0,r) = g(r) \end{cases} \qquad a(r) = r \qquad g(a(r)) = g(r)$$

$$\begin{cases} v(t,r) = g(r)t + r \\ w(t,r) = g(r) \end{cases} \qquad v(t,r) = \begin{cases} r & \text{se } r \leq 0 \\ t+r & \text{se } r>0 \end{cases}$$

$x = g(r)t + r$

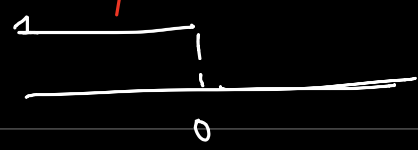


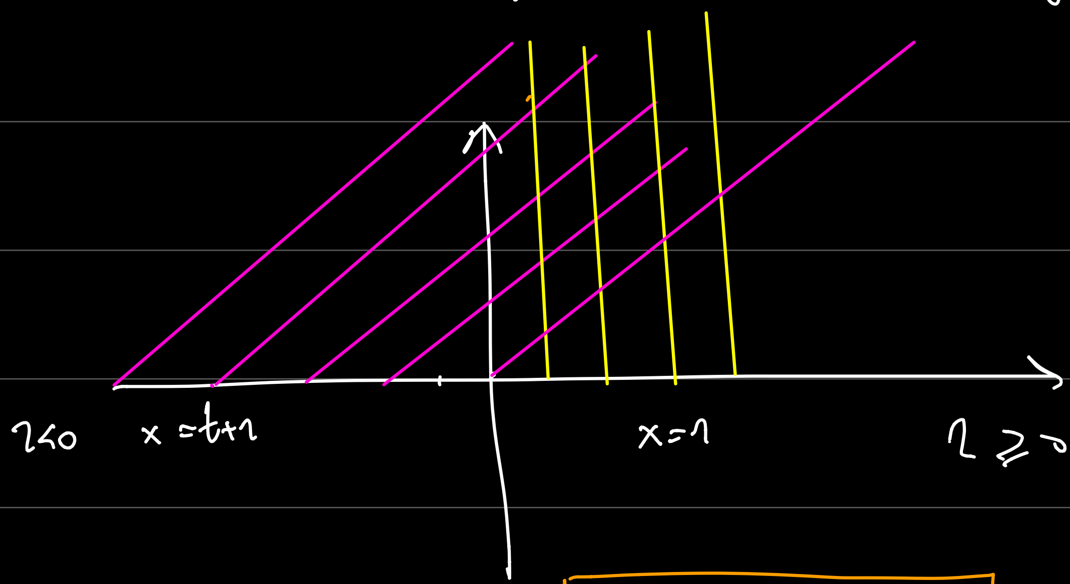
g é non decrescente $\Longrightarrow$ o.k!

Problema: riusciamo ad estendere la soluzione $u(t,x)$ nella zona ? – Riusciamo a farlo in modo continuo? C^1?

ESEMPIO:

$$g(x) = \text{segno}(-x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

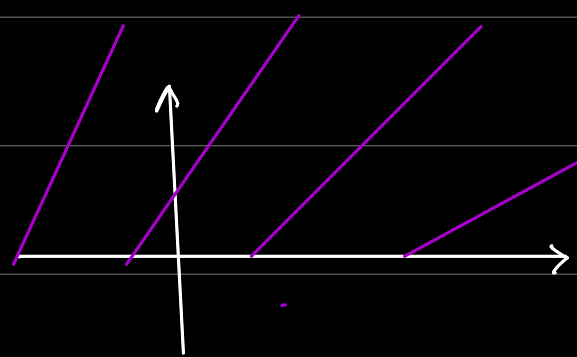




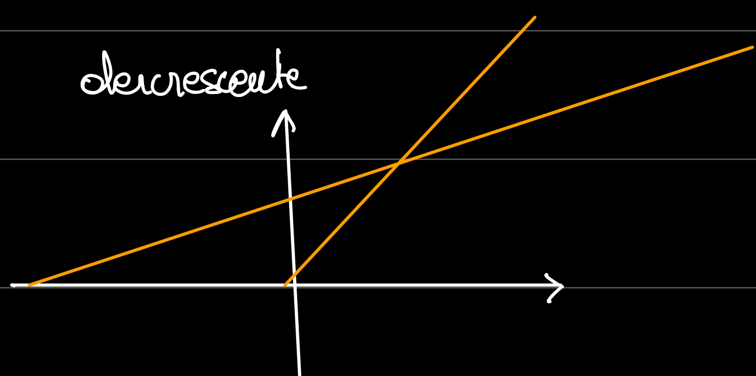
Le rette caratteristiche $\boxed{x = g(a(r))t + r}$ si intersecano.

perché se g è non crescente ($a(r) = r$)

Caso $g \circ a$ crescente



Caso $g \circ a$ decrescente



C'è un bilancio fra quanto cresce $a(r)$ e quanto cresce g

ESERCIZIO

$$\begin{cases} u_t + x u_x = 2xu \\ u(0,x) = 1 \end{cases}$$

Sistema caratteristico:

$$\begin{cases} \dot{v} = v \\ \dot{w} = 2vw \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v(0,r) = r \\ w(0,r) = 1 \end{array}$$

$v(t,r) = C(r)e^t \qquad v(0,r) = r \Rightarrow \boxed{v(t,r) = re^t}$

$\dot{w}(t,r) = 2re^t w \qquad w(0,r) = 1$

$\dot{w} = f(t)w$

$w(t) = C e^{\int_0^t f(s)\,ds} = e^{2rt} \qquad w(t,r) = C(r)\, e^{\int_0^t 2re^s ds}$

$$\boxed{w(t,r) = e^{2r(e^t - 1)}}$$

$x = re^t \qquad$ ricavo $\quad r = r(x,t) \Rightarrow \boxed{r = xe^{-t} = R(t,x)}$

$u(t,x) = w(t, R(t,x)) = e^{2xe^{-t}(e^t - 1)}$

$u(t,x) = e^{2x(1-e^{-t})} \qquad u(t,0) = 1$