Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 15 giugno 2021

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (10 punti) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva *biregolare* parametrizzata per arcolunghezza con curvatura k e torsione τ.

Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\sigma(s) = \mathbf{b}_\alpha(s)$ (l'indicatrice delle *binormali*).

1. Determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché la curva σ sia *regolare*.
2. Sotto la condizione trovata nel punto precedente, determinare la curvatura k_σ della curva σ in funzione di k e τ.
3. Dimostrare che σ regolare $\implies$ σ biregolare.

Suggerimento: la parametrizzazione $\sigma(s)$ non è per arcolunghezza (e non c'è bisogno di trovarla)

Soluzione.

1. $$\sigma' = \mathbf{b}'_\alpha = -\tau \mathbf{n}_\alpha$$

   e dunque σ è regolare se e solo se $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$.

2. Calcoliamo la curvatura di σ usando le formule per parametro qualunque, usando le formule di Frenet per la curva α:

   $$\begin{aligned} \sigma' &= \mathbf{b}'_\alpha = -\tau \mathbf{n}_\alpha \\ \sigma'' &= -\tau' \mathbf{n}_\alpha - \tau \mathbf{n}'_\alpha = k\tau \mathbf{t}_\alpha - \tau' \mathbf{n}_\alpha - \tau^2 \mathbf{b}_\alpha \\ \sigma' \wedge \sigma'' &= -k\tau^2 \mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{t}_\alpha + \tau^3 \mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{b}_\alpha = \tau^2 \left(\tau \mathbf{t}_\alpha + k \mathbf{b}_\alpha\right) \\ \|\sigma' \wedge \sigma''\| &= \tau^2 \sqrt{k^2 + \tau^2} \end{aligned}$$

   e quindi

   $$k_\sigma = \frac{\|\sigma' \wedge \sigma''\|}{\|\sigma'\|^3} = \frac{\tau^2\sqrt{k^2+\tau^2}}{|\tau|^3} = \frac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{|\tau|}$$

3. Dalla formula scritta sopra, si vede che il numeratore è sempre diverso da zero e quindi la curvatura di σ, se esiste, è sempre strettamente positiva.

Commento alla correzione.

Punto 1: la condizione al primo punto è stata trovata correttamente da quasi tutti. Molti hanno fatto un errore confondendo la condizione "torsione diversa da zero" con "curva non piana". Scriviamo bene **con i quantificatori** le due frasi:

1. $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ è regolare $\iff$ **per ogni** $s \in I$ la torsione $\tau_\alpha(s) \neq 0$
2. $\alpha(s)$ è piana $\iff$ **per ogni** $s \in I$ la torsione $\tau_\alpha(s) = 0$

La seconda frase si può riscrivere come

3. $\alpha(s)$ **non** è piana $\iff$ **esiste** $s_0 \in I$ tale che $\tau_\alpha(s_0) \neq 0$

Si vede chiaramente che la 1. e la 3. **non** dicono la stessa cosa e cioè

$$\boxed{\sigma : I \to \mathbb{R}^3 \text{ è regolare} \iff \alpha(s) \textbf{ non } \text{è piana}}$$

è sbagliato. Certamente $\sigma(s)$ regolare implica che $\alpha(s)$ non è piana, ma il viceversa non è vero.

Punto 2: il calcolo è semplice, usando le formule di Frenet per la curva $\alpha(s)$. Alcuni (non troppi) non hanno messo il valore assoluto alla torsione, che ci vuole perché $\tau_\alpha(s)$ potrebbe essere negativo. Altri non hanno completato il calcolo della norma del vettore a numeratore, calcolo facile perché i vettori $\mathbf{t}_\alpha$ e $\mathbf{b}_\alpha$ sono parte di una base ortonormale (teorema di Pitagora...).

Punto 3: chi ha fatto bene il punto 2. non ha avuto difficoltà a capire che il numeratore è diverso da zero (perché c'è anche k_α^2) e quindi la condizione $\tau_\alpha(s) \neq 0$ serve solo a dire che la frazione ha senso.

Esercizio 2. (12 punti) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos v, \sin v, uv), \qquad (u,v) \in D$$

dove $D = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$.

1. dimostrare che la parametrizzazione è regolare (in particolare dimostrare che $\mathbf{x}$ è iniettiva e che l'inversa è continua);
2. determinare la curvatura Gaussiana e media di S in ogni punto;
3. determinare se S è contenuta in un piano o in una sfera (motivare la risposta, sia positiva che negativa)
4. calcolare le direzioni di curvatura di S nel punto $p_0 = \mathbf{x}(10, \pi)$ ed esprimerle sia nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ che nella base canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.

1. Sia $\mathbf{x}(u_1, v_1) = \mathbf{x}(u_2, v_2)$, cioè

$$\cos v_1 = \cos v_2, \qquad \sin v_1 = \sin v_2, \qquad u_1 v_1 = u_2 v_2$$

Dalle prime due relazioni otteniamo $v_1 = v_2$ perché sono entrambi contenuti nell'intervallo aperto $(0, 2\pi)$. Dalla terza, usando che $v_1 = v_2 \neq 0$ si ottiene allora $u_1 = u_2$ e quindi la funzione è iniettiva.

Le derivate parziali sono

$$\mathbf{x}_u = (0, 0, v)\,, \qquad \mathbf{x}_v = (-\sin v, \cos v, u)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-v \cos v, -v \sin v, 0)$$

che è sempre diverso da 0 poiché $v \neq 0$.

Osserviamo anche che il vettore normale è quindi

$$\mathbf{N} = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

che è sempre orizzontale.

Resta da dimostrare la continuità dell'inversa. Ci sono due modi, uno diretto e un altro, più semplice, che richiede però un ragionamento più sottile.

Il modo diretto è ricavare (u, v) da (x, y, z). Come abbiamo visto prima v è la coordinata angolare del punto $(x, y, 0)$ e si esprime in modo continuo in funzione di x e y, usando le funzioni trigonometriche inverse, sempre perché il dominio di v è $(0, 2\pi)$. A questo punto

$$u = \frac{z}{v}$$

che è continua come funzione di (x, y, z).

Il modo semplice è osservare che S è contenuta nel cilindro $x^2 + y^2 = 1$, che è una superficie regolare e quindi la continuità di $\mathbf{x}^{-1}$ è garantita dalla proposizione vista a lezione.

Osserviamo anche che abbiamo appena detto che S è contenuta in un cilindro: dunque non è contenuta in un piano né in una sfera (abbiamo già risposto al punto 3)

2. Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale. La prima forma è data da:

   - $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = v^2$
   - $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = uv$
   - $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + u^2$

   e si ha
   $$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 = v^2$$
   Le derivate seconde sono

   $$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 0) \qquad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, 1) \qquad \mathbf{x}_{vv} = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

   Abbiamo già visto che il vettore normale è:

   $$\mathbf{N} = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

   e quindi la seconda forma è data da

   - $e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0$
   - $f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$
   - $g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 1$

Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0}{v^2} = \boxed{0}$$

Curvatura media:

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{v^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Dunque curvatura gaussiana e media sono costanti.

3. S non è contenuta in una sfera perché ha curvatura Gaussiana nulla.

   S non è contenuta in un piano perché la sua curvatura media non è nulla.

   (Ci sono mille altre ragioni per cui le risposte sono entrambe negative, queste vanno bene come giustificazione).

4. Calcoliamo il differenziale della mappa di Gauss nel punto $p = \mathbf{x}(10, \pi)$. Si ha

   $$I = \begin{pmatrix} \pi^2 & 10\pi \\ 10\pi & 101 \end{pmatrix}, \qquad II = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   Calcolando l'inversa ($\det I = \pi^2$) si ha

   $$I^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{101}{\pi^2} & -\frac{10}{\pi} \\ -\frac{10}{\pi} & 1 \end{pmatrix}$$

   e quindi

   $$-d\mathbf{N} = I^{-1}II = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{10}{\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   da cui si vede che gli autovalori sono 0 e 1 (lo sappiamo, è un cilindro. . .) e gli autovettori sono:

   (a) nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ sono $(1, 0)$ e $(-10/\pi, 1)$

   (b) nel punto $\mathbf{x}(10, \pi)$ i vettori tangenti sono $\mathbf{x}_u = (0, 0, \pi)$ e $\mathbf{x}_v = (0, -1, 10)$. Dunque le direzioni principali sono

   $$1 \cdot \mathbf{x}_u + 0 \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_u = \pi\mathbf{k}$$
   $$-\frac{10}{\pi} \cdot \mathbf{x}_u + 1 \cdot \mathbf{x}_v = -\frac{10}{\pi}\pi\mathbf{k} - \mathbf{j} + 10\mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

come ci aspettiamo: quella di autovalore 0 è verticale (tangente ad una generatrice del cilindro) e quella di autovalore 1 è orizzontale (tangente ad una circonferenza direttrice del cilindro)

Commento alla correzione.

Punto 1: l'iniettività è semplice e molti hanno scritto giusto. La continuità dell'inversa è stata scritta spesso male (molti non l'hanno nemmeno scritta).

La soluzione presente qui non scende in dettaglio e dice solo "... usando le funzioni trigonometriche inverse...". Alcuni hanno scritto l'inversa in modo esplicito e quasi tutti hanno sbagliato perché non basta scrivere $\arccos x$ oppure $\arcsin y$. Dominio e codominio delle funzioni trigonometriche inverse non sono quello che serviva e occorreva distinguere i quadranti a cui appartiene il punto (x, y). Queste imprecisioni di scrittura non sono state penalizzate.

Solo in 1 compito (su 37) c'è l'osservazione che la superficie è (contenuta in) un cilindro e quindi si poteva usare la proposizione 1.9 (Do Carmo, Proposition 4). Qualcun altro ha citato la proposizione, ma senza osservare che S è una superficie regolare la proposizione non si può usare.

Punto 2: praticamente tutti bene

Punto 3: anche qui, quasi tutti bene. Molti hanno usato il fatto che i punti non sono ombelicali.

Punto 4: gli autovalori sono ovvi, gli autovettori anche, ma c'è stato chi ha sbagliato. Per l'autovalore 0, tutti (o quasi) hanno trovato l'autovettore $\mathbf{x}_u$. Invece ci sono stati molti errori di calcolo per il secondo autovettore (alcuni dati dal calcolo errato dell'inversa di una matrice 2×2, cosa che non dovrebbe succedere alla fine del secondo anno). Sapendo che S è un cilindro, è immediato avere il controllo sul fatto che il secondo autovettore deve essere orizzontale e quindi si verificano i calcoli in modo semplice, o perlomeno ci si accorge subito di eventuali errori.

Esercizio 3. (10 punti) In questo esercizio fissiamo un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e tutte le forme differenziali sono definite su U.

1. sia
$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2m-1} \wedge dx_{2m}$$
Dimostrare che ω è esatta, trovando (almeno) una forma η tale che $\omega = d\eta$;

2. più in generale, sia $\omega = \sum_I a_I dx_I$ una k-forma a coefficienti *costanti*, cioè $a_I \in \mathbb{R}$ per ogni multi-indice I. Dimostrare che ω è esatta trovando (almeno) una forma η tale che $\omega = d\eta$;

3. dimostrare che se ω e η sono forme esatte, allora $\omega \wedge \eta$ è esatta;

4. più in generale, è vero che se ω è una forma chiusa e η una forma esatta, allora $\omega \wedge \eta$ è esatta? Dare una dimostrazione o trovare un controesempio;

Soluzione.

1.
$$\eta = x_1\, dx_2 + \cdots + x_{2m-1}\, dx_{2m}$$

2. Per linearità basta farlo per un monomio $a_I dx_I$ e poiché il coefficiente è costante, sempre per linearità possiamo prendere $a_I = 1$. Sia dunque
$$\omega = dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$
Basta porre
$$\eta = x_{i_1}\, dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$
e si verifica subito che $\omega = d\eta$ e dunque è esatta.

3. Dobbiamo trovare una forma ψ tale che $d\psi = \omega \wedge \eta$. Poiché ω, η sono esatte, possiamo scrivere
$$\omega = d\omega_1, \qquad \eta = d\eta_1$$
La prima idea è usare $\psi = \omega_1 \wedge \eta_1$, che non può andare bene per motivi di grado. Si osserva però che
$$d\psi = d(\omega_1 \wedge \eta_1) = d\omega_1 \wedge \eta_1 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\eta_1 = \omega \wedge \eta_1 + (-1)^k \omega_1 \wedge \eta$$
e si intuisce che la risposta può essere $\psi = \omega_1 \wedge \eta$. Derivando si ha
$$d\psi = d(\omega_1 \wedge \eta) = d\omega_1 \wedge \eta + (-1)^k \omega_1 \wedge d\eta = \omega \wedge \eta$$
perché $d\eta = 0$ in quanto η è esatta e quindi chiusa.

4. L'affermazione è VERA. Dobbiamo nuovamente trovare una forma ψ tale che $d\psi = \omega \wedge \eta$.

   Sia ω una forma di grado k. Poiché η è esatta scriviamo $\eta = d\eta_1$. Dalla dimostrazione precedente capiamo che possiamo provare con $\psi = \omega \wedge \eta_1$. Derivando si ha

   $$d\psi = d(\omega \wedge \eta_1) = d\omega \wedge \eta_1 + (-1)^k \omega \wedge d\eta_1 = (-1)^k \omega \wedge \eta$$

   perché ω è chiusa e quindi $d\omega = 0$ e quindi, per avere il segno corretto, basta scrivere

   $$\psi = (-1)^k \omega \wedge \eta$$

Commento alla correzione.

Le quattro domande erano in sostanza la stessa, in ordine di generalizzazione crescente. L'idea che serve per risolvere il primo punto (integrare un fattore e moltiplicarlo per l'altro) risolve tutti e quattro i punti. In effetti è chiaro che

$$4. \implies 3. \implies 2. \implies 1.$$

Molti hanno citato il lemma di Poincaré, per dire che chiusa implica esatta e verificando che le forme date erano chiuse (ovvio, altrimenti non chiedevo di dimostrare che erano esatte!). Il lemma di Poincaré (qualsiasi versione vogliate usare) richiede però ipotesi sul dominio U. Qui il testo era chiaro: *fissiamo un aperto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Non c'è scritto U contraibile o U stellato o niente del genere. Le affermazioni da dimostrare sono vere per un aperto U *arbitrario* e occorreva trovare le primitive giuste. Nei primi due punti la primitiva era chiesta esplicitamente quindi chi non l'ha scritta non ha risolto l'esercizio.

In linea di massima, i punti 1. e 2. sono stati fatti da quasi tutti (con qualche strana scrittura per il punto 2.) Chi ha fatto bene 3. ha poi di solito fatto bene 4. anche perché bastava riscrivere la stessa dimostrazione!