Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 7 luglio 2021

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (10 punti) Sia $\sigma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data dalla parametrizzazione

$$\sigma_a(t) = (at^3 + t, t^3 - t^2, t^2 - t + 1)$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Dimostrare che la curva σ_a è *regolare* per ogni valore di a.
2. Dimostrare che la curva σ_a è *biregolare* per ogni valore di a.
3. Determinare gli eventuali valori del parametro a per cui la curva σ_a è piana.
4. Per ognuno dei valori trovati al punto precedente, scrivere l'equazione cartesiana del piano su cui sta la curva σ_a.

Suggerimento: NON calcolare il vettore binormale.

Soluzione. Calcoliamo subito le derivate:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_a &= (3at^2 + 1, 3t^2 - 2t, 2t - 1) \\ \ddot{\sigma}_a &= (6at, 6t - 2, 2) \\ \dddot{\sigma}_a &= (6a, 6, 0) \\ \dot{\sigma}_a \wedge \ddot{\sigma}_a &= (-6t^2 + 6t - 2, 6at^2 - 6at - 2, 6at^2 + 6t - 2) \end{aligned}$$

1. Dal calcolo di $\dot{\sigma}_a$ si vede che la terza componente si annulla solo per $t = 1/2$ e in questo punto la seconda componente vale $-1/4$. Dunque il vettore $\dot{\sigma}_a$ è sempre diverso dal vettore nullo e quindi la curva è regolare.

2. Studiamo quando la curva è biregolare: la curvatura è $k(t) = \dfrac{\|\dot{\sigma}_a \wedge \ddot{\sigma}_a\|}{\|\dot{\sigma}_a\|^3}$ e quindi

   $$k(t) \neq 0 \iff \dot{\sigma}_a \wedge \ddot{\sigma}_a \neq 0$$

   La prima componente non si annulla mai: è un polinomio di secondo grado con $\Delta < 0$. Quindi σ_a è sempre biregolare.

3. Poiché la curva è biregolare, la curva è piana se e solo se la torsione è nulla. Per annullare la torsione basta annullare il numeratore $(\dot{\sigma}_a \wedge \ddot{\sigma}_a) \cdot \dddot{\sigma}_a$. Si ottiene

$$(\dot{\sigma}_a \wedge \ddot{\sigma}_a) \cdot \dddot{\sigma}_a = -12a - 12$$

e dunque la curva è piana se e solo se $a = -1$.

4. C'è un solo valore da considerare. Ponendo $a = -1$ la curva diventa:

$$\sigma_{-1}(t) = (-t^3 + t, t^3 - t^2, t^2 - t + 1)$$

L'equazione cartesiana di un piano è $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ e quindi basta trovare $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tali che:

$$\alpha(-t^3 + t) + \beta(t^3 - t^2) + \gamma(t^2 - t + 1) + \delta \equiv 0$$

Moltiplicando e raccogliendo le potenze di t la condizione diventa

$$(-\alpha + \beta)t^3 + (-\beta + \gamma)t^2 + (\alpha - \gamma)t + (\gamma + \delta) \equiv 0$$

e quindi basta risolvere il sistema:

$$-\alpha + \beta = 0, \quad -\beta + \gamma = 0, \quad \alpha - \gamma = 0, \quad \gamma + \delta = 0$$

che ha la soluzione immediata

$$\alpha = \beta = \gamma = -\delta$$

Prendendo un qualunque valore diverso da 0, per esempio ponendo $\alpha = 1$ si ottiene l'equazione del piano

$$x + y + z - 1 = 0$$

Commento alla correzione.

Punto 1: alcune persone hanno usato un curioso (e sconosciuto ai più) teorema di Algebra: *un polinomio con termine noto non nullo non si annulla mai.*

Probabilmente il teorema è alquanto sconosciuto perché è *falso*. Ripassate i polinomi e capite l'errore clamoroso fatto!

Punto 2: molti hanno capito che bisognava guardare la prima componente, ma non tutti hanno spiegato il motivo per cui non si annullava mai ($\Delta < 0$).

Punto 3: di solito OK, se non ci sono stati errori nei calcoli precedenti

Punto 4: chi ha trovato il valore corretto di a non ha avuto difficoltà a trovare l'equazione del piano.

Esercizio 2. (12 punti) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie data dall'equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Ricordiamo la definizione di vettore tangente ad una superficie in un punto
Definizione. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$ e sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ un vettore. Si dice che $\mathbf{v}$ *è tangente a* S *in* p se esiste una curva differenziabile

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \subseteq \mathbb{R}^3$$

tale che:

$$\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq S, \qquad \alpha(0) = p, \qquad \alpha'(0) = \mathbf{v}$$

1. dimostrare che $q = (0, 0, 0)$ è l'unico punto non regolare di S;
2. sia $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ un vettore scritto rispetto alla base ortonormale canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che se

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0$$

   allora $\mathbf{v}$ è tangente ad S in q.
3. viceversa, dimostrare che se il vettore $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ è tangente ad S in q, allora

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0$$

4. sia $S' = S - \{q\}$. Dal punto 1. sappiamo che S' è una superficie regolare. Sia allora $\mathbf{x}_1 : U_1 \to S'$ data da

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

   dove $U_1 = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$. Descrivere l'immagine di $\mathbf{x}_1$ e dimostrare che è una parametrizzazione regolare di (una parte di) S'. Trovare un atlante per S', cioè una famiglia di parametrizzazioni le cui immagini coprono S'.

Soluzione.

1. Determiniamo i punti critici: la superficie è data in forma cartesiana e quindi calcoliamo il gradiente della funzione:

$$f_x = 2x, \qquad f_y = 2y, \qquad f_z = -2z$$

   dunque l'unico punto per cui $f_x = f_y = f_z = 0$ è $q = (0, 0, 0)$.

2. dato il vettore $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, dobbiamo trovare una curva $\alpha(t)$ di cui $\mathbf{v}$ sia il vettore tangente in q. La curva più semplice è la retta per l'origine parametrizzata da

$$\alpha(t) = (v_1 t, v_2 t, v_3 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

È chiaro che $\alpha(0) = q$ e che $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Sostituendo la parametrizzazione di α nell'equazione di S si ha:

$$(v_1 t)^2 + (v_2 t)^2 - (v_3 t)^2 = (v_1 + v_2 - v_3)^2 t^2 = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

per l'ipotesi sul vettore $\mathbf{v}$ e quindi α è contenuta in S.

3. Sia $\mathbf{v}$ un vettore tangente a S in q. Allora per definizione esiste una curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ contenuta in S, con $\alpha(0) = q$, $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. La condizione sul vettore tangente si può scrivere come

$$x'(0) = v_1, \quad y'(0) = v_2, \quad z'(0) = v_3$$

Poiché la curva è contenuta in S, sostituendo la parametrizzazione di α nell'equazione di S si ottiene la funzione identicamente nulla:

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 - (v(t))^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Derivando si ottiene quindi nuovamente la funzione identicamente nulla

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(y) - 2z(t)z'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sostituendo $t = 0$, si ottengono le componenti del vettore $\mathbf{v}$, ma la condizione non dice niente perché $\alpha(0) = q = (0, 0, 0)$ e quindi la relazione è vera in modo banale. Poiché però la relazione vale *per ogni* $t \in \mathbb{R}$, possiamo derivare nuovamente e si ottiene (dividendo per 2 prima di derivare)

$$(x'(t))^2 + x(t)x''(t) + (y'(t))^2 + y(t)y''(t) - (z'(t))^2 - z(t)z''(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sostituendo $t = 0$, i termini che contengono le derivate seconde si annullano perché sono moltiplicati per $x(0) = 0, \ldots$ e rimane

$$x'(0)^2 + y'(0)^2 - z'(0)^2 = v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0$$

che è la tesi.

4. l'immagine di $\mathbf{x}_1$ è la parte superiore del cono (quella con $z > 0$), tranne la semiretta (privata dell'origine) di equazione parametrica $(u, 0, u)$, con $u > 0$. La funzione $\mathbf{x}_1$ è

(a) differenziabile (ovvio);

(b) iniettiva: dalla coordinata z si ricava u e dalla coppia di coordinate $(x/z, y/z)$ si ricava v (notiamo che $z = u \neq 0$);

(c) calcolando le derivate parziali si ha subito che $\operatorname{rk} d\mathbf{x}_1 = 2$ in ogni punto $(u, v) \in U_1$.

Poiché S' è una superficie regolare, $\mathbf{x}_1$ ha inversa continua ed è dunque una parametrizzazione.

Per coprire l'intera parte superiore occorre un'altra parametrizzazione, per esempio

$$\mathbf{x}_2(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

(stessa formula di $\mathbf{x}_1$) definita sul dominio $U_2 = (0, +\infty) \times (\pi/2, 5\pi/2)$.

Per coprire la parte inferiore, si possono usare $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$ definite sempre dalla stessa formula, ma sui domini

$$U_3 = (-\infty, 0) \times (0, 2\pi), \qquad U_4 = (-\infty, 0) \times (\pi/2, 5\pi/2)$$

Commento alla correzione.

Punto 1: in generale OK

Punto 2: in generale OK, quasi tutti hanno usato le rette sul cono

Punto 3: fatto solo da 3 persone. Qualcuno ha tentato di usare nuovamente le rette, ma è sbagliato. Sappiamo già che tutte le rette sul cono danno origine a vettori tangenti (punto 2). Dobbiamo dimostrare adesso che non ci sono altri vettori tangenti. Però certamente ci sono altre curve sul cono, oltre alle rette, e bisogna dimostrare che anche queste hanno vettore tangente che sta sul cono.

Punto 4: in generale la dimostrazione che $\mathbf{x}_1$ è una parametrizzazione regolare è stata fatta bene. Non sempre la descrizione dell'immagine è corretta: manca la semiretta corrispondente a $v = 0$. DI conseguenza, nell'atlante spesso mancano le parametrizzazioni necessarie a coprila (e a coprire la semiretta corrispondente nella parte $z < 0$).

A volte la parte $z < 0$ non è stata considerata.

Esercizio 3. (10 punti) Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con le coordinate (u, v) e $\mathbb{R}^4$ con le coordinate (x, y, z, w). Sia ω la forma differenziale su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$\omega = x\, dy \wedge dz + y^2\, dx \wedge dw + zw\, dx \wedge dy$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la funzione differenziabile definita da

$$f(u, v) = (u^2, v^2, uv, u + v)$$

1. Calcolare le forme $d\omega$, $*\omega$, $*(d\omega)$ e $d(*\omega)$.
2. Calcolare le forme $f^*\omega$, $f^*(d\omega)$, $f^*(*\omega)$.
3. Dimostrare che per una qualunque forma $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^4)$ si ha

$$\eta \text{ esatta} \implies f^*\eta \text{ esatta}$$

4. Dimostrare che il viceversa non è vero, trovando una forma $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^4)$ tale che $f^*\eta$ è esatta ma η non è esatta.

Soluzione.

1.

$$\begin{aligned}
d\omega &= dx \wedge dy \wedge dz + 2y\, dy \wedge dx \wedge dw + w\, dz \wedge dx \wedge dy + z\, dw \wedge dx \wedge dy \\
&= (1 + w)\, dx \wedge dy \wedge dz + (z - 2y)\, dx \wedge dy \wedge dw \\
*\omega &= x\, dx \wedge dw + y^2\, dy \wedge dz + zw\, dz \wedge dw \\
*(d\omega) &= (1 + w)\, dw - (z - 2y)\, dz \\
d(*\omega) &= 0
\end{aligned}$$

2. Calcoliamo prima il pullback dei differenziali

$$\begin{aligned}
f^*(dx) &= 2u\, du \\
f^*(dy) &= 2v\, dv \\
f^*(dz) &= v\, du + u\, dv \\
f^*(dw) &= du + dv
\end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
f^*\omega &= u^2 \cdot 2v dv \wedge (v\,du + u\,dv) + v^4 \cdot 2u\,du \wedge (du + dv) + uv(u+v) \cdot 2u\,du \wedge 2v\,dv \\
&= [-2u^2v^2 + 2uv^4 + 4u^2v^2(u+v)]\,du \wedge dv \\
&= 2uv^2[u(-1+4u+4v) + 2v^2]\,du \wedge dv \\
f^*(d\omega) &= d(f^*\omega) = 0 \\
f^*(*\omega) &= u^2 \cdot 2u\,du \wedge (du + dv) + v^4 \cdot 2v\,dv \wedge (v\,du + u\,dv) \\
&\qquad + uv(u+v)(v\,du + u\,dv) \wedge (du + dv) \\
&= [2u^3 - 2v^6 + uv(u+v)(v-u)]\,du \wedge dv
\end{aligned}$$

3. Sia $\eta = d\psi \in \Omega^k(\mathbb{R}^4)$. Allora si ha

$$f^*(\eta) = f^*(d\psi) = d(f^*\psi)$$

   e quindi $f^*\eta$ è esatta perché è la derivata esterna della forma $f^*\psi$.

4. Un esempio è proprio la forma ω usata in precedenza. Dai calcoli fatti si ha:

   (a) $f^*\omega$ *esatta*: è una 2-forma differenziale su $\mathbb{R}^2$ e quindi è chiusa per motivi di grado. Allora è esatta per il lemma di Poincaré ($\mathbb{R}^2$ è contraibile).

   Se non si vuole usare il lemma di Poincaré, non è difficile (ma noioso) trovare una primitiva, integrando rispetto ad una variabile il coefficiente di $f^*\omega$. Se scriviamo $f^*(\omega) = g(u,v)\,du \wedge dv$ e poniamo

$$G(u,v) = \int_0^u g(t,v)dt$$

   si ha

$$dG = \frac{\partial G}{\partial u}\,du + \frac{\partial G}{\partial v}\,dv = g(u,v)\,du + \frac{\partial G}{\partial v}\,dv$$

   e dunque

$$f^*(\omega) = g(u,v)\,du \wedge dv = d(G(u,v)\,dv)$$

   e cioè abbiamo trovato la primitiva di $f^*(\omega)$. Questo si può sempre fare, a patto di poter fare l'integrale indicato.

   Però questo è un esame di Geometria e non di Analisi e meno integrali si fanno, meglio è...

(b) ω *non esatta*: abbiamo calcolato in precedenza che $d\omega \neq 0$. Perciò ω non è chiusa e di conseguenza non può essere esatta.

Commento alla correzione.

Punto 1: quasi tutti giusto, a parte qualche errore di calcolo

Punto 2: quasi tutti giusto, a parte qualche errore di calcolo

Punto 3: di solito bene. A volte, invece di usare l'ipotesi η esatta, è stata usata l'ipotesi meno forte η chiusa (che è valida, naturalmente) e di conseguenza si ottiene solo che $f^*\eta$ è chiusa e poi occorre usare il lemma di Poincaré per concludere l'esattezza di $f^*\eta$. Questa dimostrazione è corretta per l'esercizio del compito, ma non andrebbe bene in situazioni più generali.

Punto 4: di solito bene. Molti hanno usato la forma ω del punto 1 (i calcoli richiesti nei punti 1 e 2 servivano proprio per avere un esempio immediato), altri hanno dato altri esempi.