Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta dell'8 settembre 2021

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (10 punti) Sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data dalla parametrizzazione

$$\sigma(t) = (\cos t, 2\sin t, t)$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Dimostrare che la curva σ è *biregolare*.
2. Determinare curvatura e torsione della curva σ
3. Trovare l'equazione di (almeno) una superficie che contiene la curva σ.

Soluzione. Calcoliamo subito le derivate:

$$\begin{aligned} \dot\sigma &= (-\sin t, 2\cos t, 1) \\ \ddot\sigma &= (-\cos t, -2\sin t, 0) \\ \dddot\sigma &= (\sin t, -2\cos t, 0) \\ \dot\sigma \wedge \ddot\sigma &= (2\sin t, -\cos t, 2) \end{aligned}$$

1. Studiamo quando la curva è biregolare: la curvatura è $k(t) = \dfrac{\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|}{\|\dot\sigma\|^3}$ e quindi
$$k(t) \neq 0 \iff \dot\sigma \wedge \ddot\sigma \neq 0$$
L'ultima componente è costante e non si annulla mai. Quindi σ è sempre biregolare.

2. Usiamo le formule per parametro qualunque:
$$k(t) = \frac{\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|}{\|\dot\sigma\|^3} = \boxed{\frac{\sqrt{8 - 3\cos^2 t}}{(2 + 3\cos^2 t)^{3/2}}}$$
$$\tau(t) = \frac{(\dot\sigma \wedge \ddot\sigma) \cdot \dddot\sigma}{\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|} = \boxed{\frac{2}{8 - 3\cos^2 t}}$$

3. Si vede subito che σ è un'elica che si avvolge sopra un'ellisse. Una superficie possibile è quindi il cilindro di base l'ellisse che ha equazione

$$4x^2 + y^2 = 4$$

Poiché l'asse del cilindro è parallelo all'asse z, quella scritta sopra è l'equazione sia dell'ellisse (nel piano $z = 0$) che del cilindro nello spazio.

Esercizio 2. (12 punti) Sia data la curva (contenuta nel piano $y = 0$)

$$\alpha(u) = (u,\, 0,\, \sin u), \qquad u > 0$$

1. Costruire una parametrizzazione locale $(D, \mathbf{x})$ della superficie S generata dalla rotazione della curva α attorno all'asse z (usare v come parametro della rotazione!).

2. Trovare la curvatura Gaussiana di S e determinare i punti in cui è positiva e i punti in cui è negativa.

3. Fissare (a piacere) un punto $P \in S$ in cui la curvatura Gaussiana è nulla. Determinare la natura del punto P: parabolico, planare, ombelicale?

Soluzione.

1. La parametrizzazione standard della superficie di rotazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v,\, u \sin v,\, \sin u)$$

e quindi possiamo scegliere come dominio $D = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$. In questo modo non abbiamo la generatrice sul piano $y = 0$. La parametrizzazione è regolare per i risultati standard sulle superfici di rotazione, in quanto la curva α non incontra l'asse di rotazione.

2. Calcoliamo: le derivate parziali sono:

$$\mathbf{x}_u = (\cos v,\, \sin v,\, \cos u)\,, \qquad \mathbf{x}_v = (-u \sin v,\, u \cos v,\, 0)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-u \cos u \cos v,\, -u \cos u \sin v,\, u)$$

Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale. La prima forma è data da:

- $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + \cos^2 u$
- $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$
- $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = u^2$

e si ha

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 = u^2(1+\cos^2 u)$$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, -\sin u) \qquad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin v,\ \cos v,\ 0) \qquad \mathbf{x}_{vv} = (-u\cos v,\ -u\sin v,\ 0)$$

Il vettore normale è:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(-u\cos u\cos v,\ -u\cos u\sin v,\ u)\\ &= \frac{1}{\sqrt{u^2(1+\cos^2 u)}}(-u\cos u\cos v,\ -u\cos u\sin v,\ u)\end{aligned}$$

e quindi la seconda forma è data da

- $e = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu} = -\dfrac{u\sin u}{\sqrt{u^2(1+\cos^2 u)}}$
- $f = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv} = 0$
- $g = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv} = \dfrac{u^2\cos u}{\sqrt{u^2(1+\cos^2 u)}}$

Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \boxed{-\frac{\sin u\cos u}{u(1+\cos^2 u)^2}}$$

Il denominatore è sempre positivo (ricordiamo che abbiamo preso $u > 0$) e quindi si ha subito

- $K > 0 \iff \sin u\cos u < 0$ e cioè u nel secondo o quarto quadrante
- $K < 0 \iff \sin u\cos u > 0$ e cioè u nel primo o terzo quadrante

3. Un punto in cui $K = 0$ deve avere $\sin u = 0$ oppure $\cos u = 0$. Scegliamo $P = \mathbf{x}(\pi,\pi) = (-\pi, 0, 0)$ (il valore di v non influenza il calcolo, perché la superficie è di rotazione). In questo punto si ha

$$I_P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pi^2 \end{bmatrix}, \qquad II_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\pi}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e quindi

$$-d\mathbf{N}_P = I_P^{-1} \cdot II_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\pi\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

In questo punto P il differenziale della mappa di Gauss ha determinante nullo, ma non è la mappa nulla quindi:

$$\boxed{P \text{ è parabolico, non planare, non ombelicale}}$$

Esercizio 3. (10 punti) Consideriamo $\mathbb{R}^4$ con le coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) e sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega = x_3 x_4\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2\, dx_3 \wedge dx_4$$

1. Calcolare le forme $d\omega$, $*\omega$, $*(d\omega)$, $d(*\omega)$ e $\omega \wedge \omega$.
2. Considerare la forma
$$\eta = \sum_{i<j} x_i x_j dx_i \wedge dx_j, \qquad 1 \leq i < j \leq 4$$
e calcolare $\eta \wedge \eta$.
3. Più in generale, considerare una 2-forma generica
$$\psi = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \qquad 1 \leq i < j \leq 4$$
dove i coefficienti a_{ij} sono funzioni, e trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché $\psi \wedge \psi \neq 0$.

Soluzione.

1.
$$\begin{aligned}
d\omega &= (x_4\, dx_3 + x_3\, dx_4) \wedge dx_1 \wedge dx_2 + (x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2) \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
*\omega &= x_1 x_2\, dx_1 \wedge dx_2 + x_3 x_4\, dx_3 \wedge dx_4 \\
*(d\omega) &= -x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 - x_3\, dx_3 + x_4\, dx_4 \\
d(*\omega) &= 0 \\
\omega \wedge \omega &= 2x_1 x_2 x_3 x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4
\end{aligned}$$

2.
$$\eta \wedge \eta = 2x_1 x_2 x_3 x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

3. Nel prodotto wedge i termini che non si cancellano sono quelli in cui compaiono tutti e quattro gli indici non ripetuti e quindi si ha
$$\begin{aligned}
\psi \wedge \psi = 2a_{12}a_{34}\, & dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&+ 2a_{13}a_{24}\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
&+ 2a_{14}a_{23}\, dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= 2(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4
\end{aligned}$$
La condizione è quindi
$$\psi \wedge \psi \neq 0 \iff a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} \neq 0$$